

Resolución de Problemas en la formación Matemática de los y las Estudiantes

Mario Marín Sánchez
Profesor Escuela de Matemática, ITCR
Coordinador Centro de Recursos Virtuales

12 de junio de 2010

1. Introducción

La educación es el eje sobre el que se sustenta cualquier esfuerzo exitoso en el desarrollo socioeconómico de la sociedad. No sólo se requiere generar los avances académicos pertinentes, también es necesario preparar a los ciudadanos y las ciudadanas para que asuman las responsabilidades que esos avances o transformaciones demanden.

De la misma manera, es un fenómeno complejo y fuertemente condicionado por la sociedad que mientras le exige resultados también la restringe de diversas maneras. En Costa Rica está dinámica se ve de manifiesto, por ejemplo, en el pulso de las pruebas nacionales. Por un lado, son vistas como un control que permita, de alguna manera, establecer mínimos y ejercer funciones de control de calidad. Desde otra óptica, muchos sectores de la sociedad ven en estas mismas pruebas, obstáculos que impiden el desarrollo de muchos ciudadanos.

Como respuesta a esta dualidad y en atención a su mandato de contribuir con el desarrollo del país, la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica en alianza con la fundación CR-USA [2] y con el apoyo del programa PROMECE¹ del MEP², está desarrollando el proyecto *Centro de Recursos Virtuales*; una iniciativa que incluye la creación de recursos para apoyar a estudiantes y docentes y una plataforma de gestión que permita el acceso y administración oportuna de los recursos y los usuarios.

Las aplicaciones que se desarrollan en el contexto del Centro de Recursos Virtuales (CRV) incluyen materiales didácticos y ejercicios. En las siguientes notas se analizan los tipos de problemas a utilizar y las características centrales de cada uno de ellos. También se agrega la intención que la coordinación de este evento planifica para este tipo de recurso.

Los ejercicios para la conformación de las prácticas en el proyecto Centros de Recursos Virtuales deben responder a un sano equilibrio entre las condiciones nacionales por un lado y los

¹Programa para el mejoramiento de la educación

²Ministerio de Educación Pública de Costa Rica

lineamientos académicos declarados en el documento “Centro de Recursos Virtuales: Proceso para la elaboración de y estandarización de materiales” [3]. En ese sentido el nivel y tipo de ejercicio propuesto no sólo ayudará a los estudiantes en su preparación para atender las exigencias del programa del MEP, también incentivarán el desarrollo y apropiamiento de otras conductas muy importantes.

Los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática están sustentados en principios de responsabilidad y compromiso por parte de el y la estudiante y de el y la docente y los problemas constituyen un medio eficiente a través del cual educadores y estudiantes interactúan para generar condiciones que favorezcan la adquisición del conocimiento. En el entendido, eso si, de que existe condiciones en motivación, interés y responsabilidad, por parte de los involucrados, que permitan los procesos de apropiación.

La matemática siempre se ha enseñado a través de problemas, [4, 1]. En Costa Rica, muy pocas veces se usan problemas en contexto que puedan motivar al estudiante a enfrentar una situación que simule la realidad. Lo más frecuente es que se recurra a problemas laboratorio donde el profesor o profesora a través de una situación problema induce al estudiante a desarrollar una u otra habilidad. Esta situación es un reflejo de muchos años prácticas educativas basadas en las solución de ejercicios, en el CRV nos interesa promover cambios en esta situación.

En la literatura es frecuente que se establezcan diferencias importantes entre lo que es un ejercicio y lo que es un problema [1], no obstante las fronteras entre uno y otro son difusas pues el más simple de los ejercicios para un estudiante puede ser un verdadero problema para otro.

En la filosofía genereal del CRV tanto los problemas como los ejercicios forman parte de las tareas que se incentivarán para que el y la estudiante se apropien de los conocimientos. En ambos casos, debe existir un contrato implícito entre facilitador y estudiante acerca de las responsabilidades comunes. Un contrato sustentado en valores como el trabajo, el deseo de superación y la responsabilidad. Valores que, la escuela por sí misma sólo puede promover y acentuar, pero su existencia o no en estudiantes y docentes trasciende a la escuela y toca las puertas de la familia y la cultura social existente.

2. Ejercicios y Problemas

Para iniciar tratemos de aclarar ¿qué vamos a entender por problema y qué por por ejercicio?

Si una situación a resolver sólo representa para el estudiante la dificultad de aplicar uno o varios pasos conocidos para obtener la respuesta, es decir conoce previamente un procedimiento o camino que le permitirá resolverlo entonces estamos ante un ejercicio.

Al contrario, si ante una situación de dificultad el estudiante tiene conocimientos suficientes para abordar la situación pero no hay un camino directo o conocido y es necesario realizar otros procesos como razonamiento u organización de información estamos ante un problema.

Veamos las características más importantes de un ejercicio y de un problema [1]:

Para un ejercicio:

1. En general, no representa un reto mayor para el estudiante.

2. Suele ser directo identificar cuál es el camino para resolverlo.
3. Implica la aplicación de procedimientos y mecanismos previamente conocidos y ensayados.
4. Es usual, que sus soluciones sean muy predecibles.

Mientras que para un problema:

1. En general, la resolución requiere mucho esfuerzo.
2. Es muy común que tengan varias soluciones.
3. Resolverlo implica analizar cuidadosamente la situación y definir un plan de ataque y eventualmente planes alternativos los cuales requieren un tiempo para verificar si funcionan y para formalizarlos.
4. En general, son planteamientos abiertos en los que es usual que varias estrategias puedan funcionar.
5. Su resolución exige una inversión importante de paciencia, perseverancia, creatividad, talento, etc.

3. Tipos de Preguntas en el CRV

3.1. Preguntas de Selección única

En nuestro medio, y quizá debido a la experiencia con las pruebas nacionales, se ha difundido la concepción equívoca de que las preguntas de selección única restringen el desarrollo de habilidades de razonamiento por parte del estudiante. Sólo se puede compartir esta afirmación si se acepta que los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática se sustentan en la búsqueda misma de la solución de ejercicios como meta final, esa no es la filosofía del CRV. Tampoco el hecho de que puedan ser burlados aplicando algún tipo de artificio es una limitación importante de este tipo de pregunta, con un grado menor de facilidad el o la estudiante pueden ser entrenado para resolver otros tipos de problemas, los que llamamos de desarrollo por ejemplo, sin entenderlos del todo. ¿Acaso no es común que un o una estudiante aplique la fórmula general, o reglas para despejar ecuaciones sin entender qué está pasando. Es igualmente engañoso el aplicar Fórmula General para factorizar una expresión cuadrática o aplicar algún tipo de artificio en la calculadora para detectar en una lista cuál de las opciones es un factor de la misma. Es posible que en ninguno de los dos casos el o la estudiante disponga del conocimiento de los conceptos involucrados en el ejercicio.

En un contexto mucho más amplio, en el que el proceso de apropiación se sustenta en la interacción constructiva docente-estudiante también es válido afirmar que las preguntas de selección tienen características que las hacen convenientes. Por ejemplo, permiten una manera simple y automatizada de corregirlas, abriendo la oportunidad de recibir retroalimentación en tiempo real, son idóneas para identificar potenciales errores o concepciones equivocadas, además

no requieren en el o la estudiante el desarrollo de destrezas en la escritura matemática para poder interactuar a través de ejercicios con sus pares o con el profesor.

Por estas razones en el CRV se utilizarán los ejercicios de selección y se han construido respetando al máximo las siguientes características.

- En lo posible, ser aptos para programarlos y disponer de una parametrización clara. La generación de parámetros para el ejercicio debe ser restringida de manera que el objetivo del ejercicio y el tipo de destreza que refuerza no cambien al variar el parámetro. Además el control estricto de parámetros debe prevenir la presencia de inconsistencias y de ejercicios muy largos.
- Este sistema no se ha diseñado para evaluaciones sumativas, solo formativas. Se busca ofrecer la posibilidad de responder de manera simple y obtener una retroalimentación inmediata.
- Los distractores de cada ítem están planificados de manera que respondan a los errores de concepto más comunes en el tema, lo que permite al profesor o profesora identificar las acciones correctivas necesarias.
- El planteamiento permite la aplicación directa de un concepto o una secuencia simple de conceptos o algoritmos.

3.2. Ejercicios de Desarrollo

Los ejercicios de desarrollo tienen la particularidad de que permiten a el o la estudiante realizar un proceso continuo y articulado de pasos en los que aplica uno o varios conceptos para resolver una situación problema. Además permite desarrollar las destrezas de escritura y de la capacidad de complementar conceptos para resolver una situación.

La actividad de desarrollo, a diferencia de la de selección, permite una mejor calificación del trabajo sobre un proceso y no sobre aspectos puntuales.

Para facilitar la interacción estudiante-estudiante y estudiante-profesor, se ha diseñado una herramienta para editar la solución de problemas que permite editar texto matemático y enviarlo ya sea a un profesor o profesora o a un par. Para esta parte de ejercicios de desarrollo también se utilizará la idea de parametrización y las variantes respecto a la selección única corresponden a la complejidad para resolver el problema, la posibilidad de revisión de proceso y ante todo la estructura y tipo de habilidad que el ejercicio o problema requiere. Es importante hacer notar que muchos de los problemas y ejercicios que se presentan en selección pueden ser replanteados como problemas de desarrollo.

De preferencia este tipo de ejercicio debe responder al descubrimiento de patrones o comportamientos o a la aplicación no inmediata de conceptos elementales. Por ejemplo si se desea una tarea sobre fórmula general no es recomendable utilizar siempre redacciones como *Determine las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x = 12$* , al contrario deber redactarse preguntas en las que deba haber algún uso o interpretación no inmediato del concepto.

Por ejemplo para el caso donde el objetivo sea evaluar el manejo del concepto de solución de una ecuación cuadrática un ejercicio puede ser.

El valor de a para que $x = 2 + a$ sea solución de la ecuación $x^2 = 4(a + 2)$ es:

En este ejercicio a puede ser un parámetro adecuado. Note que en este tipo de ejercicio viene de la igualdad $(2 + a)^2 = 4(a + 2) \iff 2 + a = 4$. Al resolver este ejercicio se necesita articular al menos dos conceptos para obtener la respuesta. Por ejemplo, requiere conocer el concepto de solución y aplicar una diferencia de cuadrados o una fórmula de despeje. O bien ser muy observador, lo cual resulta mejor si al analizar las expresiones puede ver cual es el valor de a .

Las preguntas de desarrollo incluirán la alternativa de que el estudiante o la estudiante soliciten orientación. La orientación corresponde con algunas preguntas que pueden ayudarle a descubrir o construir el esquema de solución a partir de elementos mas simples.

Se permiten dos clases de actividades de desarrollo. Ejercicios para aplicar directamente reglas y algoritmos, por ejemplo operaciones con polinomios o factorización y problemas orientados al desarrollo de destrezas de razonamiento y afirmación de conceptos.

Para los problemas de desarrollo es deseable que presenten las siguientes características:

- Obligan a la utilización de algún concepto matemático en un entorno donde el estudiante o la estudiante deben entender la situación para luego diseñar un plan de solución.
- Existe la posibilidad de reducir el problema ya sea haciendo casos particulares y luego generalizando o bien por descomposición en partes conectadas entre si.
- De ser posible los ejercicios deben ser parametrizables. Condición deseable.
- Sea posible identificar sugerencias que permitan orientar al estudiante hacia el diseño de una estrategia de solución y se fomente la exploración de experiencias previas, el razonamiento en abstracto y la construcción del conocimiento.

4. Anotaciones generales sobre la clasificación de los problemas

A efecto de definir una taxonomía de los problemas y ejercicios se realizará una distinción de dos características importantes en ellos. Cada ejercicio se clasificará de acuerdo con el nivel de dificultad operativa del mismo, es decir la dificultad en los procedimientos para resolverlo y con la destreza que se busca desarrollar con el ejercicio. Es evidente que esta clasificación no es absoluta y lleva cierto grado de subjetividad.

Por ejemplo si el tema de interés es el concepto de raíz o cero de un polinomio y su relación con el teorema del factor un ejercicio posible puede obtenerse de expandir $(ax + b)(x^2 + x + 1) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ y preguntar por la factorización completa.

En ese caso se espera que el estudiante o la estudiante encuentre la forma de las posibles raíces racionales del polinomio y realice un proceso de reducción hasta factorizar. Ocurre con

frecuencia que es posible realizar la tarea sin saber absolutamente nada del teorema del factor. Una pregunta como esta evalúa por igual a quien conoce los conceptos y a quien conoce los algoritmos. Esta pregunta se cataloga como de desarrollo de destrezas instrumentales.

Una posible pregunta para evaluar la comprensión de conceptos puede redactarse en los siguientes términos:

Considere un polinomio de grado 3 de la forma $x^3 + mx^2 + nx + r$ del cual se conocen 2 raíces que son, a y b , si es conocido que ese polinomio cumple que $P(2) = 5$ cuál es el otra raíz.

Esta pregunta obliga a conocer el concepto de raíz y el teorema del factor y aplicar la evaluación de polinomios para despejar un valor. Es un ejercicio cuya solución implica conocer los conceptos y explorar posibilidades para resolverlo, por supuesto que existen otras soluciones por ejemplo por medio de sistemas de ecuaciones.

Los ejercicios y problemas desarrollados en el CRV se agruparán de acuerdo a dos características centrales. *Dificultad y destrezas que fomenta*

4.1. Nivel de Dificultad

Por dificultad se clasificarán los problemas en tres instancias, nuevamente existe alguna subjetividad en esta clasificación : Los niveles son *Dificultad básica (Básico)*, *dificultad media (Medio)* y *dificultad alta (Alto)* y está relacionada con la complejidad, ya sea operativa o conceptual que requiere la solución del ejercicio.

Un ejercicio se considera de dificultad básica si el proceso de solución implica la aplicación directa de un procedimiento o regla si que medie mas que la memoria y la asociación visual. Por ejemplo, resolver la ecuación $x^2 + 3x - 4 = 0$ tiene una dificultad básica pues solamente requiere que el estudiante aplique una fórmula.

La dificultad media se reserva para aquellas tareas que requieran la aplicación de conceptos o reglas en situaciones no inmediatas y deba realizarse una exploración o interpretación antes de aplicar el procedimiento. Por ejemplo si la redacción del ejercicio es: *determine los valores de β para que la ecuación $x^2 - 4x + \beta$ tenga solución real* tenemos un ejercicio de dificultad media pues el proceso para encontrar la respuesta obliga a aplicar una fórmula en un contexto no inmediato y a interpretar la información que se obtiene de la fórmula.

Los Problemas de nivel de dificultad alto son aquellos que requieren una aplicación compleja de fórmulas y el uso de uno o varios conceptos, es usual que requieran la interpretación y la descomposición para transformarlos en problemas equivalentes. Por ejemplo: “dada una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ de raíces $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$ encuentre las raíces del polinomio $cx^2 + bx + a$ ”. La solución de este ejercicio requiere de asociación de conceptos y de un poco de exploración.

La dificultad está ligada a la redacción del problema, por ejemplo si en el problema previo la redacción de la segunda parte fuese. “*verifique que las raíces de $cx^2 + bx + a$ son $1/\lambda_1$ y $1/\lambda_2$* ”. El problema sería de dificultad media pues, entre otras opciones, puede aplicarse la fórmula general y obtener las soluciones en ambos casos para luego hacer juego algebraico y llegar a la conclusión que se pide.

4.2. Destrezas

Además de la dificultad los ejercicios se organizarán por el tipo de destreza o habilidad que promueven en el estudiante. Estas habilidades son *Desarrollo de destrezas instrumentales (Aplicación)*, *reafirmación de conceptos (Conceptual)* y *razonamiento abstracto (Razonamiento)*

Los ejercicios de *Desarrollo de destrezas instrumentales* son aquellos que se proponen para reafirmar la habilidad para aplicar fórmulas:

Si la redacción fuese “*determine el resultado y el residuo que se obtiene al dividir $P(x) = x^5 - 2x^3 + 6$ entre $Q(x) = x^3 + 2$* ”. El ejercicio no promueve ningún tipo de razonamiento se reduce a aplicar un algoritmo en el que lo mas importante es no cometer errores de cálculo. Este tipo de ejercicio se clasifica como ejercicio de *Aplicación*.

Se clasifican como ejercicios de *Reafirmación conceptual* las situaciones problema cuya solución implica conocer un concepto y utilizarlo en algún contexto para obtener la respuesta. Por ejemplo:

Dados los polinomios $P(x) = x^5 - 4x^3$ y $Q(x) = x^2 + ax$ encontrar el o los valores de a de manera que el residuo al dividir $P(x)$ entre $Q(x)$ sea cero.

Es posible realizar el proceso de división y con base en el residuo determinar los posibles valores de a .

La clasificación mas alta de ejercicio son aquellos problemas que, por no tener un mejor nombre, llamaremos de *Razonamiento abstracto*. Las características centrales de estos problemas son que no es inmediato reconocer una estrategia de solución y para resolverlos se requiere comprender los conceptos y aplicarlos adecuadamente. En este tipo de problemas, el análisis de casos particulares, el poder descubrir mediante la exploración el resultado y la posibilidad de plantear resultados parciales son características deseables. Por ejemplo consideremos el siguiente problema.

Sabiendo que los polinomios $P(x) = x^5 - ax^3$ y $Q(x) = x^2 - 2x$ tienen en común una raíz distinta de cero encontrar el o los valores de a La solución de este problema obliga a conocer el concepto de raíz, el teorema del factor y ante todo a interpretar la información que se suministra.

En geometría este tipo de problemas son muy frecuentes pues en la mayoría de los casos no es suficiente conocer resultados para resolver un problema. Por ejemplo, *Verificar que el punto O que es la intersección de las mediatrices de los segmentos \overline{AB} y \overline{CB} en el $\triangle ABC$ equidista de los tres vértices.* El proceso de solución implica una utilización adecuada de definiciones, una representación y el uso de otros resultados como teorema de pitágoras o congruencia de triángulos.

Debe ser claro que la clasificación de un ejercicio en dificultad y destreza no es absoluta. Muchos ejercicios pueden ser resueltos usando esquemas distintos y lo que para alguien es un reto a nivel de aplicación para otro puede ser un reto como concepto o como abstracción. En este sentido los ejercicios se clasificarán buscando identificar el nivel que mejor se adapta en ambas categorías. Algunos ejemplos:

1. Determine el valor de la expresión

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

Este ejercicio puede clasificarse en dificultad media y conceptual. Si se generaliza a un valor n entonces puede clasificarse como un ejercicio de dificultad media y abstracción.

2. La misma redacción de un problema puede incidir en la clasificación, por ejemplo si se redacta el ejercicio en la forma

Determine las soluciones de la ecuación $ax + c = b$

entonces el ejercicio es de dificultad básica y de aplicación.

Ese mismo ejercicio, redactado en la forma

Verifique que el valor $x = (b - c)/a$ es solución de la ecuación $ax + b = c, a \neq 0$

debe clasificarse como dificultad básica y conceptual.

3. Sea X un punto que se encuentra sobre la prolongación del diámetro AB de un círculo de radio $r > 0$ y centro O y tal que B queda entre X y O . Sea Y otro punto también sobre el círculo que cumple que $\angle XYO = \pi/2$. Si $XY = t > r$ determine la longitud AX . Este es un ejercicio de dificultad media y conceptual.
4. Determine el área de un triángulo equilátero de lado a . Dificultad media y conceptual. Dependiendo de los conocimientos del estudiante este ejercicio puede ser básico y de aplicación. Esto puede pasar en la muchos ejercicios.
5. Sobre un triángulo $\triangle ABC$ equilátero de lado $a > 0$ se traza una segmento MN paralelo a AB y a una distancia $h < a$ del vértice opuesto. Determine el área de de la región $ABMN$. Este es un ejercicio conceptual y de dificultad media.
6. Determine el resto al dividir $n^2(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ entre 360. Ejercicio de abstracción y de nivel de dificultad alto.
7. Se multiplican $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 20$ ¿Cuántos ceros tiene el final el número resultante. Dificultad media y abstracción.
8. Dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tienen el mismo residuo al dividirlos por $(x - 3)$ Determine el valor de $(P - Q)(3)$ Abstracción y nivel básico.

En general la regla es que un ejercicio de abstracción y de nivel de dificultad alto sólo aparezca en pruebas donde el usuario tenga claro que eso va a ocurrir. Los ejercicios de abstracción en general son medios o difíciles y los de aplicación son, en general, fáciles o medios.

5. Conclusiones

Los esfuerzos por mejorar la educación son de nunca terminar. Diversos factores inciden en la educación, probablemente sea cierto que existen muchos docentes que no tienen la formación ni la entrega necesarias para cumplir una función tan delicada como es la educación y es evidente que en muchos casos no existan las condiciones mínimas en aulas o equipamiento. Pero hay otros factores que tienen una incidencia notable en la educación y que frecuentemente no se abordan.

La apatía del estudiante y profesor, la carencia de materiales de apoyo para profesores y estudiantes en zonas alejadas o marginales, la ausencia de cualquier tipo de controles en cuanto a nivel o enfoques, el desinterés de la familia por exigir y trabajar por una educación de calidad dando prioridad a una basada en notas mas que en aprendizaje, la televisión y la internet sin límites y algunos pseudo valores muy arraigados en la juventud actual que en muchos casos pareciera llevarlos a una vida sin complicaciones, y sin asumir responsabilidades.

Por si eso fuera poco debemos agregar a este lastre la dificultad que he tenido el país de promover un modelo de educación con un mayor sentido de oportunidad y responsabilidad y con objetivos, quizá mas modestos pero, accesibles y apropiados.

El CRV no pretende resolver problemas de esta índole, eso si, tenemos toda la seguridad de que con los recursos desarrollados muchos estudiantes se beneficiarán y encontrarán en esta opción una motivación para ser mejores. Ese es el objetivo del CRV, brindar nuevas alternativas para apoyar a los y las estudiantes que busquen una formación matemática adecuada.

Referencias

- [1] J. Colera, M. de Guzman y S. Fernández, Matemáticas I, Anaya, España, 1996.
- [2] M. Marín, “Proyecto: Centros de Recursos Virtuales”, Proyecto conjunto ITCR CRUSA, 2005-2007.
- [3] M. Marín, “ Centro de Recursos Virtuales: Proceso para la elaboración y estandarización de materiales”
- [4] G. Polya, “Cómo plantear y resolver problemas”, Trillas, México. 1965.