

# Taller: Dibujando con *GeoGebra*, construcciones útiles para maestros y maestras

Randall Blanco Benamburg  
Instituto Tecnológico de Costa Rica  
rblanco@itcr.ac.cr

Ana María Sandoval Poveda  
Universidad Estatal a Distancia  
amsandoval@uned.ac.cr

**Palabras clave:** Geometría, cuadriláteros, primaria, herramienta, *GeoGebra*, evaluación, dinámica.

**Resumen:** El objetivo de este taller es poner a disposición de los y las participantes estrategias que les permitan dinamizar sus clases e innovar en ellas y en sus evaluaciones. Esto se hará por medio del *software GeoGebra*.

## **Materiales requeridos para la realización del taller**

Estos materiales deberán estar a disposición de los y las participantes del taller.

- Fotocopias de ejercicios
- Laboratorio de computación, deberá instalarse el *GeoGebra* (*software libre*)

## **Materiales de los participantes**

Aunque lo deseable es que cada persona cuente con estos instrumentos; posiblemente no los tengan durante la actividad del Festival. Se tendrán algunos a disposición para aquellas personas que requieran utilizarlos.

- Papel blanco
- Lápiz
- Regla graduada

## **Problemática en la que se centra el taller**

Necesidad de los y las docentes de primaria de contar con herramientas para trabajar algunos conceptos de Geometría, en particular los cuadriláteros, que le permitan no solo hacer más dinámicas sus lecciones, sino evaluar de una manera más cercana al trabajo de aula.

## **Planteamiento del taller**

El taller está planteado para realizarse en dos sesiones:

1. La primera consiste trabajar los componentes teóricos del tema y el uso de herramientas computacionales para reproducir el trabajo con papel, regla y lápiz (conocimiento de los comandos básicos del *GeoGebra*). Para esto se partirá de las figuras geométricas planas que se estudian en la educación primaria y sus características.
  - a. ¿Qué características debe cumplir una figura de cuatro lados para que se considere un paralelogramo? [ideas y conocimientos de los participantes]
  - b. ¿Qué herramientas del *GeoGebra* permiten construir figuras que cumplan con esas especificaciones? [uso de elementos del manual e ideas generadas por el grupo]
  - c. ¿Qué otras características tienen las figuras construidas? [diferenciación entre paralelogramos de distintas clasificaciones]
  
2. Sesión de ejercicios de construcción y razonamiento para construir las figuras geométricas en el laboratorio de cómputo. Elementos de uso de la herramienta para la construcción de prácticas y ejercicios de evaluación (utilizables como evaluación sumativa).

### **Fundamentación teórica**

En la educación primaria se trabaja todos los años con contenidos de Geometría; con figuras de geometría plana y tridimensional. En los planes de estudio oficiales para la Educación General Básica (EGB) menciona el análisis de las características de estos elementos en varias oportunidades.

En el caso de este taller, se circunscribirá a trabajar únicamente con las características de las figuras planas y en forma particular los cuadriláteros. Esta limitación se hace precisamente por cuestiones de tiempo y profundidad en el estudio. Si se abarcaran más figura, el tiempo dedicado a ellas sería mínimo.

La primera mención a los cuadriláteros y sus características se hace en el programa de segundo año, objetivo 2 de Geometría: “2 - Reconocer forma, elementos, características y nombre de triángulos, cuadrados y rectángulos”

(Ministerio de Educación Pública, 2005a: 124). En este momento, se especifica el estudio de las características de las figuras “Identificación de los elementos y características del triángulo, el cuadrado y el rectángulo, y las semejanzas y diferencias entre estos” (Ministerio de Educación Pública, 2005a: 124).

Se retoman las características de los cuadriláteros en el programa de tercer año. Allí se estudian los polígonos convexos y se señala entre los procedimientos lo siguiente: “Identificación de las características de triángulos y cuadriláteros, sus semejanzas y diferencias” (Ministerio de Educación Pública, 2005a: 149).

Por lo tanto, en el primer ciclo de la Educación General Básica se trabajan los cuadriláteros a partir de sus características más evidentes: cantidad de lados y convexidad. Ambos elementos corresponden únicamente a la forma de la figura y es en el segundo ciclo que se hace más profundo el estudio de las diferentes figuras.

En el programa de cuarto año se anota “3 - Caracterizar los cuadriláteros considerando su clasificación, el paralelismo que presentan sus lados y la medida de sus ángulos internos” (Ministerio de Educación Pública, 2005b: 141). Como parte de los contenidos para desarrollar este objetivo se hace la siguiente mención: “Características de los cuadriláteros (base, altura, lados, ángulos internos, diagonales, ejes de simetría) y clasificación en paralelogramos (cuadrado, rectángulo, rombo y romboide) y no paralelogramos (trapezoido y trapezoido)” (Ministerio de Educación Pública, 2005b: 141). En ese objetivo y contenido se desarrolla el estudio de las características de los cuadriláteros en general. Es a partir de este momento que se habla de la clasificación de los cuadriláteros según sus características.

El trabajo con las características de las figuras puede ser un tema atractivo para las y los estudiantes, pues permite desarrollar actividades que requieran creatividad y el uso de su ingenio y visión geométrica como parte de su actividad

de aula. Estas actividades se fundan en las sugerencias que propone el mismo programa de estudios oficial para la EGB.

Las actividades y situaciones que se diseñen tienen que enfocarse hacia la comprensión, asimilación e interiorización de conceptos de la matemática, a partir de la manipulación que el niño y la niña hagan de los materiales o recursos didácticos; pero recordando en todo momento, que estos son medios que coadyuvan a la construcción y reconstrucción de conceptos, y nunca un fin en sí mismos (Ministerio de Educación Pública, 2005b: 18).

El uso de actividades que se centren en procesos y habilidades cognitivas se enmarcan en las solicitudes que las autoridades educativas hacen a los y las docentes.

Una actividad importante para el desarrollo del pensamiento del niño y la niña es la clasificación, la cual se pone en juego al observar e identificar las propiedades que tienen los objetos. [...] Al iniciar el trabajo con figuras geométricas, el educando reconstruye en gran parte el proceso evolutivo de la historia de la matemática, desde un proceso de visualización de objetos, hasta la construcción y reconstrucción de conceptos (Ministerio de Educación Pública, 2005b: 71).

Además, si se agrega el componente computacional como un ingrediente adicional, los resultados pueden ser sorprendentes.

Por otra parte, los educadores y las educadoras que trabajen este tema a fondo, con el uso del laboratorio de computación y alguna herramienta tecnológica que lo permita, tendrán a su alcance no solo actividades llamativas, sino posibilidades de trasladar este tipo de actividades a la evaluación.

Debido a que el currículo, las actividades y el conocimiento matemático que propugnan estos programas tienen una base conceptual, la evaluación no es una tarea simple ni reducida. El desarrollo de estructuras conceptuales constituye un proceso a largo plazo; las estructuras conceptuales se desarrollan, elaboran, profundizan y se van haciendo más completas con el paso del tiempo. En consecuencia, la evaluación debe ser un proceso continuo. No puede asumirse que una experiencia suelta de aprendizaje o de evaluación vaya a ofrecer un cuadro completo del desarrollo intelectual de los estudiantes. La

evaluación debe intentar dar a todos los estudiantes la oportunidad de reconocer sus capacidades, potencialidades y limitaciones y de cómo superar estas últimas (Ministerio de Educación Pública, 2005b: 105).

Como se indica, la evaluación es una tarea continua y no sólo destinada a emitir una calificación. En este caso, se propone que las actividades que se trabajen permitan al docente usarlas tanto en la forma de pruebas escritas como de actividades de trabajo. Estas pueden realizarse en clase o extra clase y existe la posibilidad de que se usen para la evaluación sumativa.

Para llevar a cabo este taller se propone retomar las ideas del didacta francés Alain Kuzniak. Según él hay tres formas de capacitar de un profesional en educación:

- a) Los niños y futuros profesores parten de la misma situación inicial.
- b) La situación que se le presenta a los adultos es ligeramente más compleja pero se puede transferir fácilmente.
- c) La situación que se le presenta [a los docentes] podría transferirse fácilmente a la escuela elemental (Kuzniak, 2003: 75).

Cada una de estas perspectivas presenta sus ventajas y sus desventajas, algunas para los y las docentes y otras para el estudiantado.

**Tabla 1.** Interpretación de las hipótesis de Kuzniak (2003).

Situación	Ventajas	Desventajas
<b>a</b>	Es sencillo que el educador y la educadora tomen conciencia del procedimiento pedagógico seguido y lo lleve directamente al aula.	Se corre el peligro de infantilizar a los y las docentes y provocar una reacción de rechazo.
<b>b</b>	El traslado al nivel de los y las estudiantes de I y II ciclo no será difícil.	Los contenidos podrían ser muy básicos para sustentar los que deben enseñarse.
<b>c</b>	Es posible que la y el docente aprendan conocimientos matemáticos no triviales que le permitan sustentar su enseñanza; esto enriquecerá su acervo matemático.	Se corre el peligro de que el conocimiento no llegue nunca a los y las estudiantes, ya sea porque la y el docente no pudo adaptarlo o porque lo adaptó erróneamente.

Para este taller, se propone trabajar el primero de los esquemas y cuidar que la desventaja descrita no llegue a presentarse. Para esto se proyecta trabajar con la función evaluativa que los y las docentes deben cumplir y centrar allí la culminación del proceso de taller.

## Actividades del taller

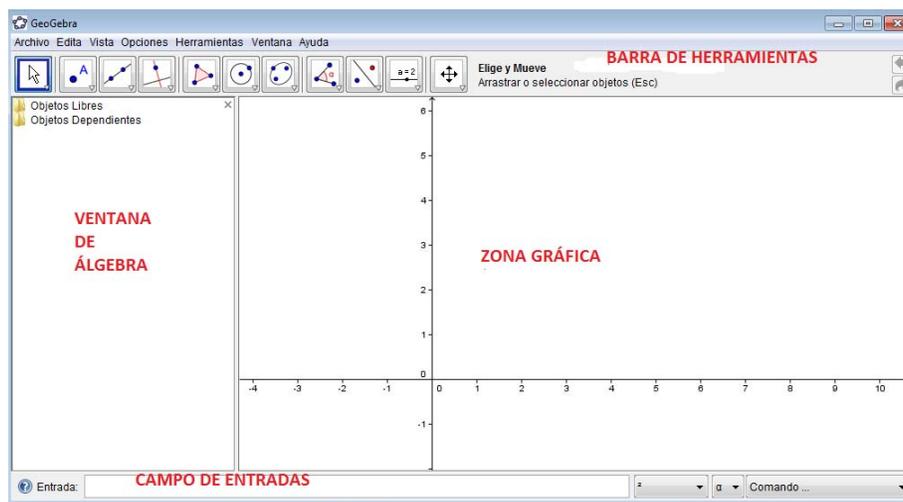
### 1. Conociendo el *GeoGebra*

Para el desarrollo del taller se trabajará con el programa *GeoGebra* principalmente por las siguientes dos razones:

- Es una herramienta informática muy versátil y útil para el estudiantado y docentes de Matemática.
- Es un *software* libre.

*GeoGebra* es un *software* de Matemática que reúne geometría, álgebra y cálculo. Lo desarrolló Markus Hohenwarter en la Universidad Atlántica de Florida (*Florida Atlantic University*) para la enseñanza de matemática escolar.

Al abrir el *GeoGebra* aparece una ventana en la cual se pueden identificar cuatro secciones: *Barra de herramientas*, *Ventana de Álgebra*, *Zona gráfica* y *Campo de entradas*.



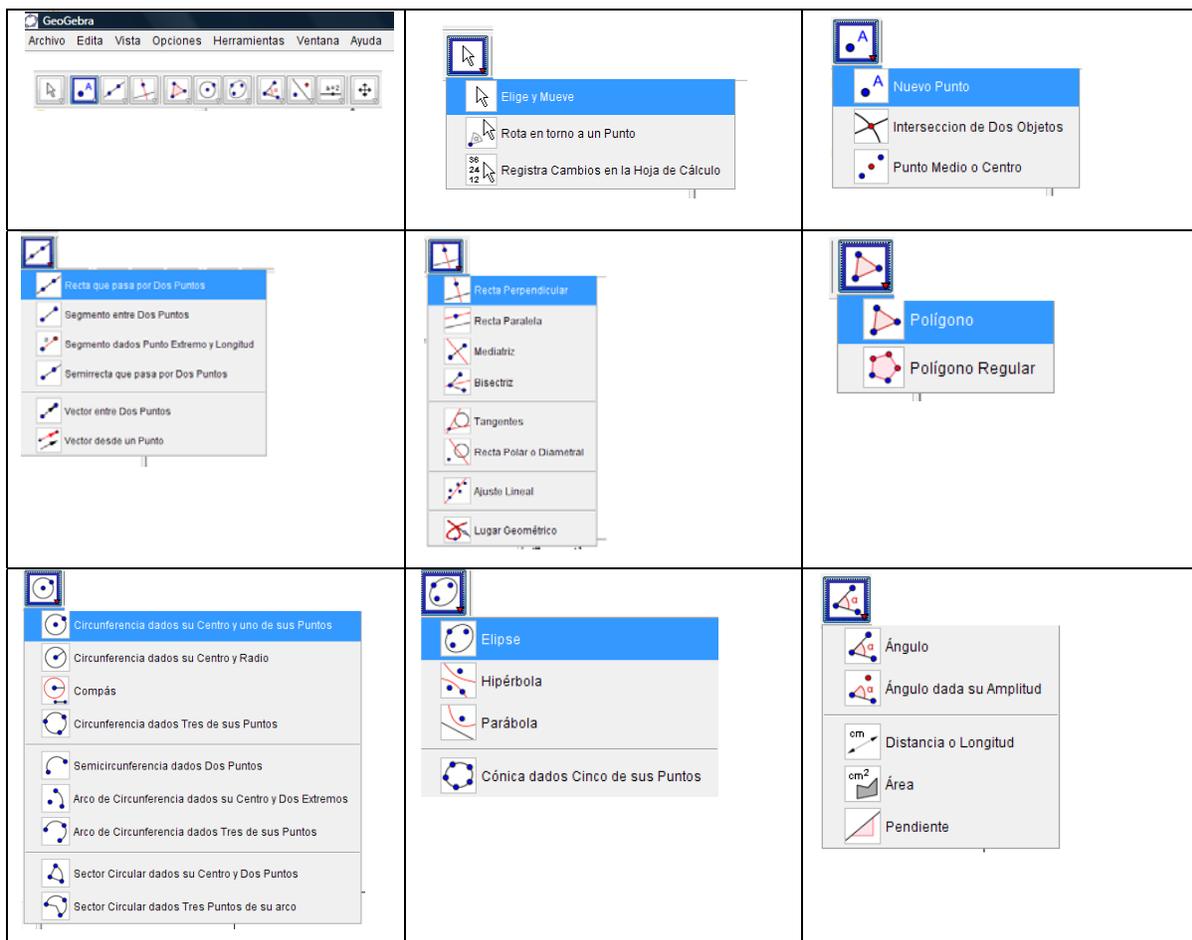
Captura de pantalla 1. Pantalla principal del *GeoGebra*.

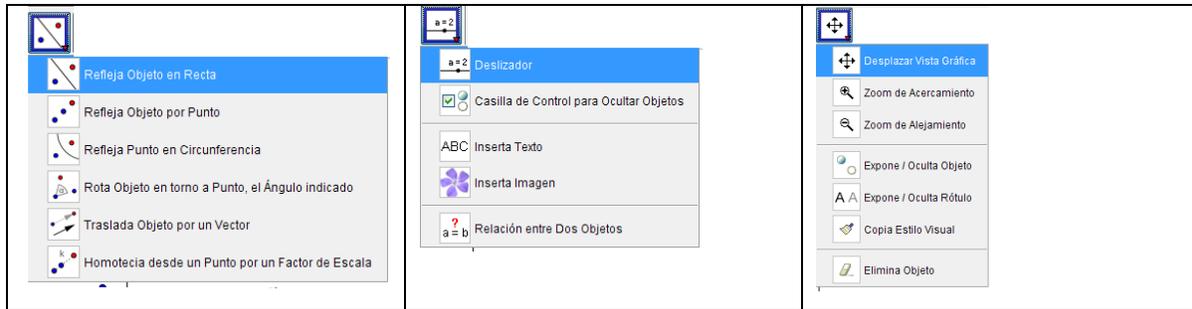
Guiando con el *mouse* los útiles de construcción (modos) de la *Barra de herramientas* pueden construirse figuras sobre la *Zona gráfica* cuyas coordenadas o ecuaciones aparecen en la *Ventana de Álgebra*.

En el *Campo de entradas* o *Campo de texto* pueden anotarse directamente coordenadas, ecuaciones, comandos y funciones que pasarán a representarse en la *Zona gráfica* al ingresarse pulsando la tecla “Enter”.

Para el trabajo en este taller se hará énfasis en la *Zona gráfica* y el menú de la parte superior de la pantalla. También se hará referencia a la *Ventana de Álgebra*, sin entrar en detalles sobre las ecuaciones de los objetos geométricos.

Antes de hacer construcciones se hará un recorrido por las diferentes opciones que brinda el menú del *GeoGebra*:





2. Dibujando rectas, segmentos, ángulos y círculos

A. Utilizando el menú de la parte superior de la pantalla construya:

- Una recta  $\overline{AB}$
- Otra recta  $\overline{DE}$  que interseque a la recta anterior en un punto C.
- El segmento  $\overline{AE}$

B. Abra una nueva ventana (en el menú archivo) y dibuje:

- Un segmento  $\overline{AB}$  de 5 unidades de longitud
- Una recta perpendicular a  $\overline{AB}$  por  $B$
- El punto medio  $M$  de  $\overline{AB}$
- Un punto  $C$  que no pertenezca a  $\overline{AB}$
- Una recta que contenga a  $C$  y sea perpendicular a  $\overline{AB}$
- Una recta paralela a  $\overline{AB}$  que contenga a  $C$

C. Abra una ventana nueva y dibuje:

- Un segmento  $\overline{AB}$
- Una circunferencia de centro  $A$  y radio  $AB$ .
- Una circunferencia de centro  $B$  y 2 unidades de radio.

D. Abra una ventana nueva y dibuje:

- Un ángulo  $\angle ABC$
- Un ángulo de  $80^\circ$
- La bisectriz del  $\angle ABC$

E. Abra una ventana nueva y dibuje:

- Una recta  $\overline{AB}$
- Un punto  $C$  que no pertenezca a  $\overline{AB}$
- El simétrico de  $C$  con respecto a  $\overline{AB}$

3. Dibujando triángulos.

A. Abra una ventana nueva y dibuje:

- Un triángulo cualquiera, dibujando primero sus vértices y luego sus lados



- Un triángulo  $\Delta ABC$  usando el menú



- Un triángulo equilátero usando el menú

4. Dibujando cuadriláteros

A. Abra una ventana nueva y dibuje:

- Un cuadrilátero cualquiera  $\square ABCD$  dibujando primero sus vértices y luego sus lados

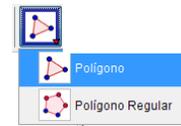


- Un cuadrilátero cualquier usando el menú

5. Dibujando polígonos regulares

A. Abra una ventana nueva y dibuje:

- Un pentágono regular y un octágono regular usando el menú



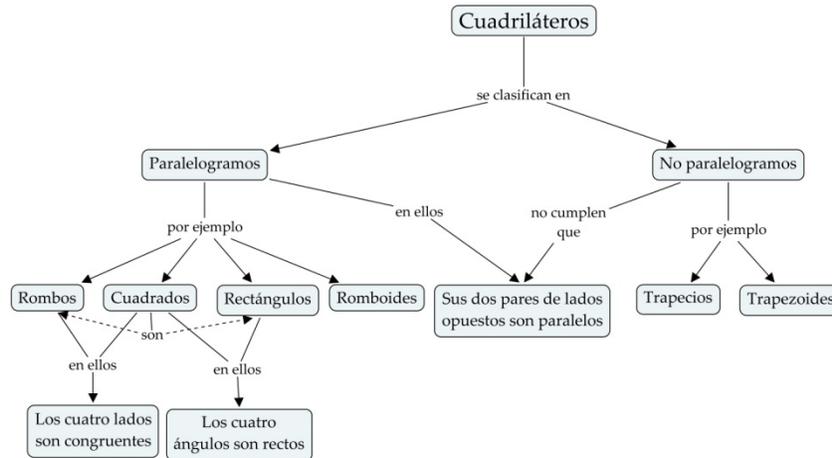
6. Para la segunda sesión se solicitará a los participantes en el taller:

- A. Llevar, si está dentro de sus posibilidades, material con el que trabajan en sus aulas como prácticas, exámenes o libros de texto que contengan cuadriláteros

que quisieran reproducir utilizando el *GeoGebra*, con la intención de incluir figuras en los materiales que ellos producen.

Para la siguiente sesión se parte de la siguiente premisa: *los y las participantes conocen las herramientas básicas de GeoGebra y tienen interés en trazar algunas figuras específicas.*

Se solicitará al grupo que entregue los materiales que llevaron o expongan sus necesidades al inicio de la sesión. Si alguno o alguna tiene interés por figuras que no sean cuadriláteros, se atenderá por separado. El primer paso será el análisis del esquema:

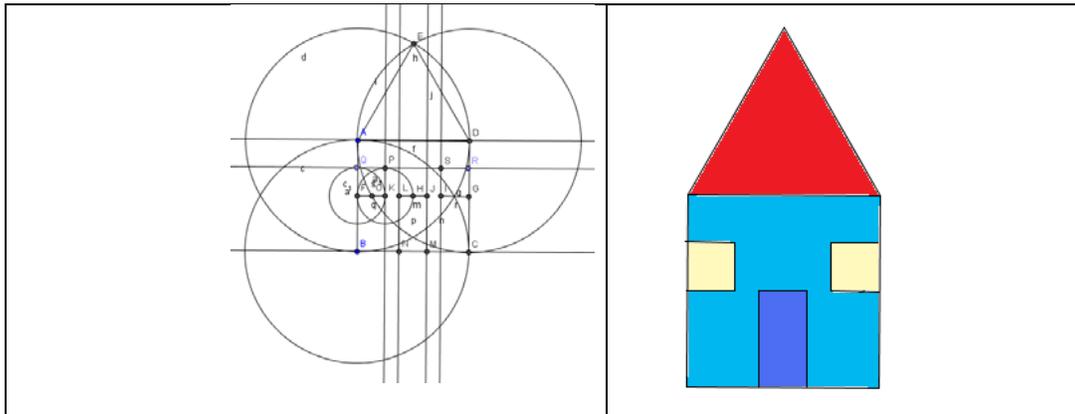


- ¿Son claras las relaciones representadas?
- ¿Qué características de cuadriláteros específicos no se señalan? Agréguelas.
- ¿Podría representar otras relaciones que no se encuentren en el mapa?
- ¿Cómo puede ayudar estas características al trazo de los diferentes cuadriláteros?

Solicitar a los participantes que tracen las imágenes correspondientes a los siguientes ejercicios:

1. Utilizando tres cuadrados, un triángulo equilátero y un rectángulo (puerta) construir la figura adjunta. Esta “casita” cumple las siguientes condiciones:

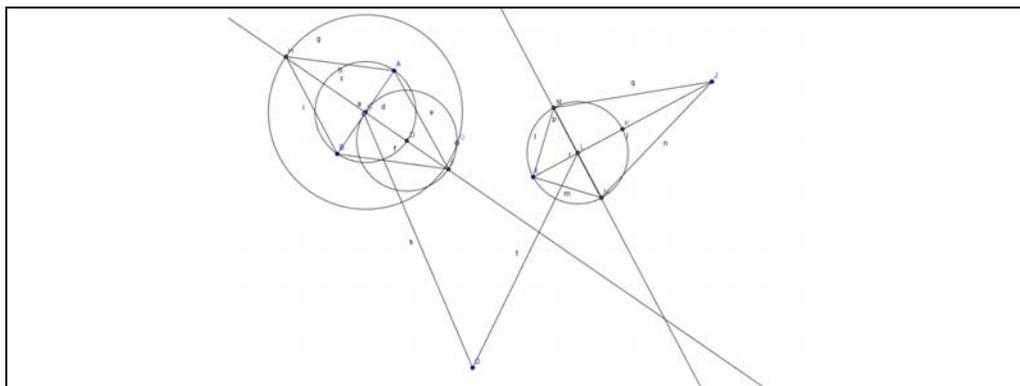
- El borde inferior de cada ventana debe estar a la misma altura que el borde superior de la puerta.
- La puerta tiene la mitad de la altura de la casa (sin considerar el techo).
- La puerta debe estar a igual distancia de las ventanas.
- El ancho de cada ventana debe ser la cuarta parte del ancho de la casa.

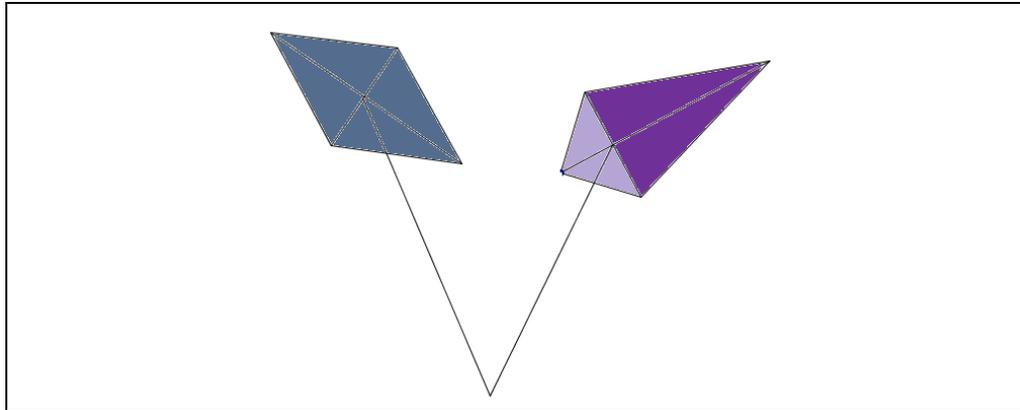


¿Qué relación hay entre el área de cada ventana y el área de la casa? ¿Y entre el área de cada ventana y el área de la puerta?

Si el perímetro del techo es 36 m, encuentre el perímetro de los cuatro rectángulos.

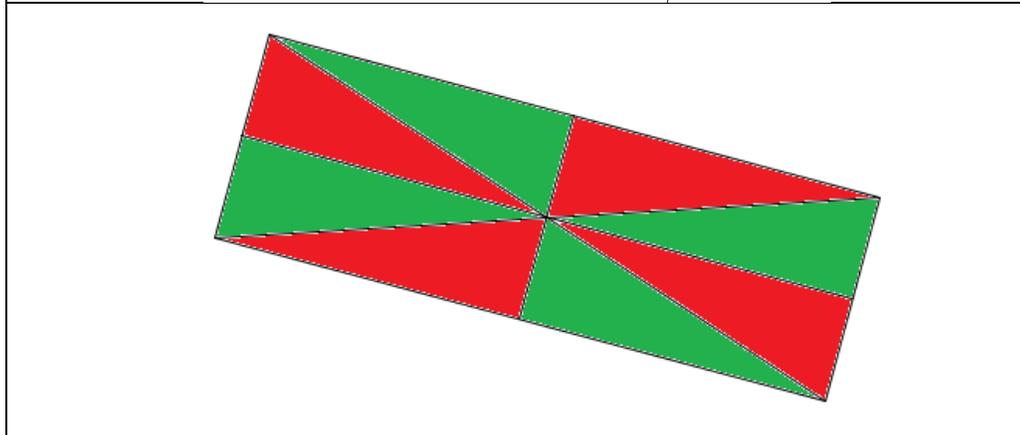
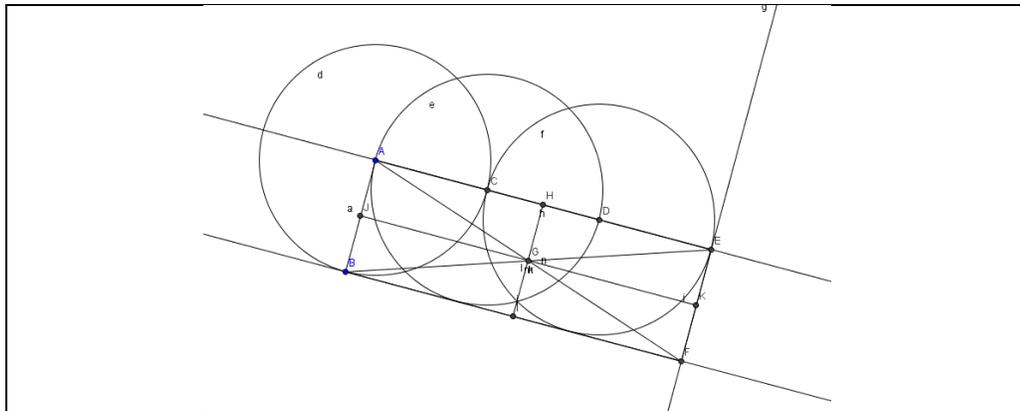
- Dibujar dos papalotes. Uno es un rombo y el otro es un cuadrilátero que cumple las condiciones siguientes:
  - Las diagonales son perpendiculares entre sí y una mide el doble de la otra.
  - La diagonal mayor biseca a la menor.
  - La diagonal menor divide a la mayor en dos partes tales que una mide el triple de la otra.



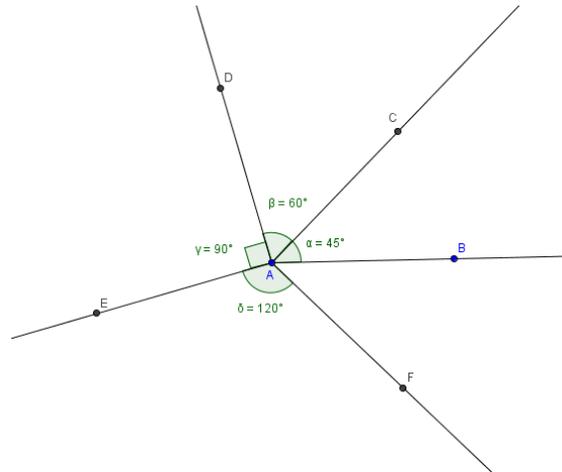


Si en ambos cuadriláteros las diagonales miden 12 cm y 18 cm ¿cuál es el área de cada uno?

3. Dibuje una bandera rectangular dividida en 8 secciones triangulares como se muestra en la figura adjunta. Las condiciones son las siguientes:
- El largo del rectángulo debe ser el triple del ancho.
  - Los vértices de los triángulos deben ser los puntos medios de los lados o de las diagonales o vértices del rectángulo.



4. Realice el siguiente dibujo. ¿Qué tipo de ejercicio podría realizar con él?



a) Indique la medida de los siguientes ángulos:

$\angle DAE$

$\angle CAE$

$\angle DAB$

$\angle BAF$

b) Indique el nombre del ángulo cuya medida se da a continuación:

$60^\circ$

$105^\circ$

$150^\circ$

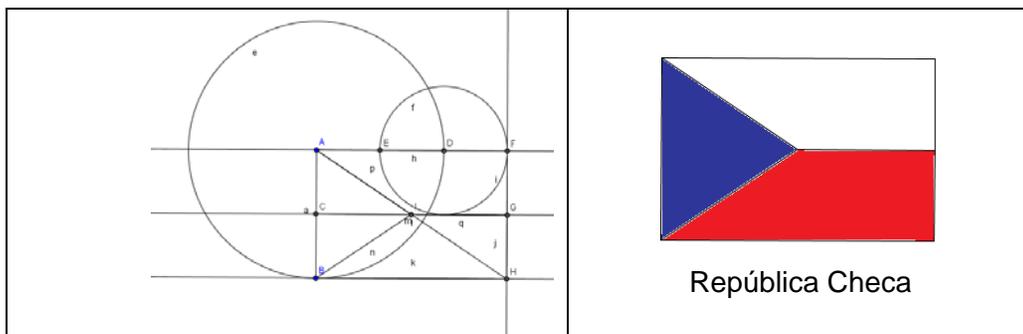
$165^\circ$

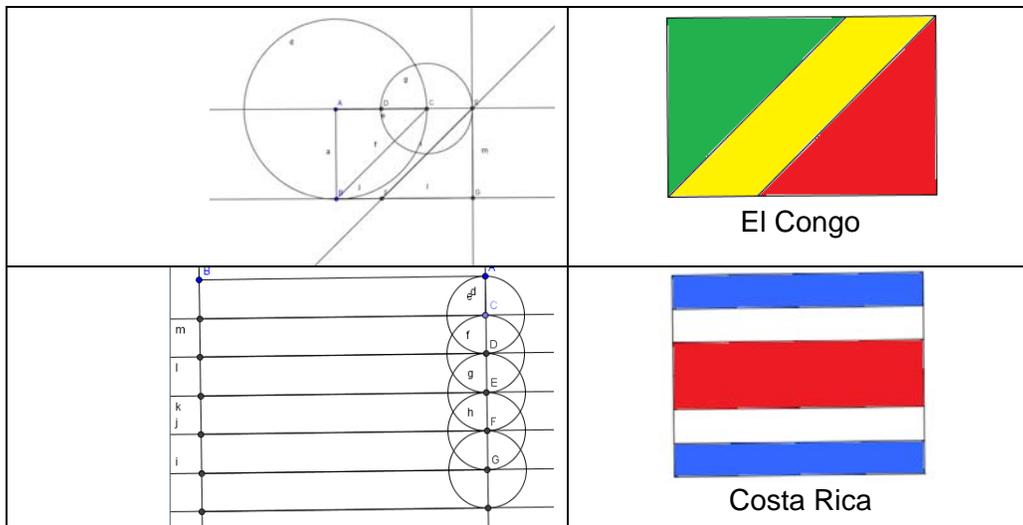
c) Indique el nombre de dos ángulos agudos, dos obtusos y dos rectos.

5. Dibuje las siguientes banderas utilizando el *GeoGebra* y el *Paint*. Considere las siguientes características:

a) En la bandera de la República Checa los vértices del triángulo deben ser dos vértices del rectángulo y el centro del rectángulo y las franjas roja y blanca deben tener igual ancho.

b) En la bandera del El Congo el ancho de la franja debe ser la mitad del ancho del rectángulo, los triángulos deben ser isósceles.





Un aspecto interesante del *GeoGebra* es que permite extraer imágenes de él y usarlas en otros programas. Para esto es preciso utilizar las herramientas del menú superior *Archivo*, en la opción *Exporta*. De esta forma puede llevar sus figuras al Word o a algún otro procesador de texto. También puede abrirlas con algún manipulador de imágenes (*Photoshop*, *Paint* u otro similar) y realizar diferentes acciones con ellas.

Esta característica del programa permite utilizar las imágenes del programa en la elaboración de actividades, ejercicios o pruebas escritas.

Por otra parte, si se cuenta con la opción del uso frecuente de un laboratorio de informática, también pueden crearse actividades o evaluaciones con el uso directo del *software*, ya sea guardando los archivos propios del programa o exportando las construcciones como "*Hoja dinámica como página web*".

En esta modalidad, se guarda el archivo como un archivo *.html* y no es necesario tener el programa *GeoGebra* instalado para ver la construcción realizada. Es necesario tener solamente algún navegador de Internet y el Java instalado en su máquina para acceder a la construcción de sus estudiantes y verificar que cumple las características deseadas.

Suponga que sus estudiantes deben construir un cuadrado de 5 cm de lado. Para verificar que su construcción es adecuada es necesario que algunos de los segmentos que trazó pertenezcan a rectas perpendiculares entre sí, que todos los segmentos tengan la misma medida y que las otras características propias del cuadrado se cumplan a cabalidad. En un archivo dinámico, esto se puede verificar, pues es posible alterar la construcción para ver que la construcción fue correcta o no.

## Referencias

- Damián, A. et al. *El uso de modelos dinámicos en la didáctica de la matemática*. En: Revista Uno, revista de didáctica de las Matemáticas, volumen 24, pp 62-77.
- Hohenwarter, M. y Preiner J. (2009). Documento de Ayuda de GeoGebra. Manual Oficial de la Versión 3.2. Recuperado en febrero de 2010 desde: <http://www.geogebra.org/help/docues.pdf>.
- Kuzniak, A. (1994). *Las estrategias utilizadas para formar a los maestros de primer grado en Matemáticas*. En: La enseñanza de las matemáticas para alumnos de 2 a 12 años: herramientas para la formación de profesores en Francia. De la Comisión permanente de los IREM para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primarial (COPIRELEM). París: ARPEME.
- Kuzniak, A. (2003). *La enseñanza de la geometría en la formación inicial*. En: La enseñanza de las matemáticas para alumnos de 2 a 12 años: herramientas para la formación de profesores en Francia. París: ARPEME.
- Ministerio de Educación Pública (2005a). *Programa de estudio, Matemática I Ciclo*. San José: Editorial del Ministerio de Educación Pública.
- Ministerio de Educación Pública (2005b). *Programa de estudio, Matemática II Ciclo*. San José: Editorial del Ministerio de Educación Pública.
- Villella, José (2001). *Uno, dos, tres... Geometría otra vez. De la intuición al conocimiento formal en la EGB*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor S.A., serie Carrera docente.