

# Formas de pensamiento de profesores sobre variabilidad mediante problemas de simulación computacional

M.Sc. Greivin Ramírez Arce

Escuela de Matemática

Instituto Tecnológico de Costa Rica

gramirez@itcr.ac.cr

**Resumen:** La variabilidad es el corazón de la Estadística, pues permite comprender y explicar de manera precisa el análisis de datos y el pensamiento estadístico. Así, esta investigación - estudio de caso con profesores en formación - responde a la pregunta: ¿Cuáles son las formas de pensamiento que muestran profesores en formación cuando resuelven problemas en donde deben contemplar la variabilidad utilizando Fathom? Se obtuvieron avances significativos en las formas de pensamiento de los participantes al final del proceso.

**Abstract:** Variability is at the heart of the Statistics. It allows us to understand and to explain in a precise way data analysis and the statistical thinking. This research, which is a case study of teachers in training, answers the question: how do teachers in training think when using Fathom to resolve problems involving variability? In this study, significant advances are obtained in understanding the thought processes of the participants.

**Palabras claves:** formas de pensamiento, variabilidad, simulación, Fathom, profesores en formación.

**Keywords:** thinking forms, variability, simulation, Fathom, training teachers.

## INTRODUCCIÓN

Los programas educativos que se han estado implementando en Estados Unidos, Japón, Filipinas, entre otros; están orientados a que los estudiantes recolecten, organicen y analicen datos, para interpretar resultados y aplicarlos a la toma de decisiones (cf., Kader & Perry, 2006). Sin embargo, existe una gran brecha en la profundidad y calidad de los programas de estudio entre los diferentes sistemas educativos (ICMI IASE Study Book, 2010 y Kader & Perry, 2006, citados por Laskey & Martignon, 2010).

Así por ejemplo en Costa Rica, el Ministerio de Educación Pública (2005) contempla dentro de sus programas de estudio la enseñanza de la estadística, pero la mayor parte de las ocasiones, los docentes omiten la enseñanza de estos temas, ya que este contenido no es evaluado en las pruebas estandarizadas y por esta razón los estudiantes completan su formación secundaria sin conocer sobre estocástica, lo que viene a repercutir en el rendimiento de los primeros cursos universitarios de probabilidad y estadística. Actualmente el Ministerio de Educación Pública se encuentra trabajando en nuevos programas de estudio que contemplan con gran fuerza los procesos estocásticos, pero el camino por recorrer es largo y todo parece indicar que también será lento.

La variabilidad, como parte del estudio de la probabilidad y estadística, constituye por sí sola el eje fundamental del desarrollo de los procesos estocásticos, que permiten comprender y explicar de una manera más concisa el análisis de resultados y el pensamiento estadístico (Pfannkuch, 1997; Pfannkuch & Wild, 2004; Shaughnessy, 1997; Garfield & Ben-Zvi, 2005; Hammerman & Rubin, 2004; Watson & Kelly, 2002). Sin embargo, este análisis no estaría completo sino se toma en cuenta el uso de la tecnología.

En los últimos años, el uso de la tecnología ha sido pieza clave en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la estadística (Ben-Zvi & Garfield, 2004; Hummerman & Rubin, 2004; Makar y Confery, 2005), en especial, el uso de programas computacionales que permiten modelar muchas y muy diversas situaciones, ya que estos representan una estrategia alternativa para la resolución de problemas y el análisis de la variabilidad como parte de un proceso exploratorio.

La presente investigación busca colaborar en la formación de profesores como conductores más tarde, de la enseñanza a nivel secundaria, respondiendo específicamente a la pregunta: *¿Cuáles son las formas de pensamiento que muestran profesores en formación cuando resuelven problemas en donde deben contemplar la variabilidad utilizando Fathom?*

## MARCO CONCEPTUAL

Para el análisis de las formas de pensamiento, se tomará como base el modelo propuesto por Wild & Pfannkuch (1999), ya que su modelo es considerado como una de las estrategias didácticas más fuertes para desarrollar el pensamiento estadístico en los estudiantes, como lo afirman en la siguiente cita:

*La piedra angular de la enseñanza en cualquier área es el desarrollo de una estructura teórica con la cual darle sentido a la experiencia, para aprender de ella y transferir perspicacia, penetración y discernimiento a otros. Reconocemos que mucho pensamiento estadístico puede tener lugar provechosamente en actividades cotidianas, particularmente en la interpretación de información en los medios y otros reportes. (p. 2-3).*

El siguiente esquema representa la propuesta de Wild & Pfannkuch que se utilizará para analizar los datos de esta investigación:

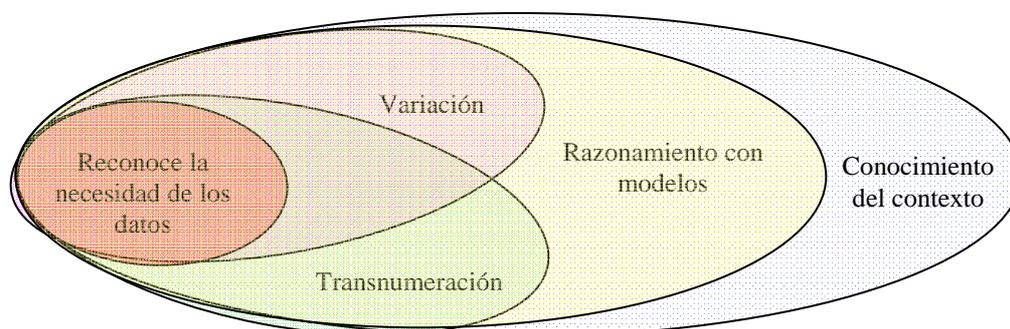


Figura 1. Tipos de pensamiento estadístico

El esquema anterior, supone como primer paso, el reconocimiento de la necesidad de los datos, el cual permite la variación o la transnumeración, que representa otra forma de pensamiento. El tipo de pensamiento donde los estudiantes desarrollan modelos necesariamente requiere que el individuo haya superado las tres primeras etapas dentro de los tipos de pensamiento anteriormente expuestos; finalmente, el tipo de pensamiento estadístico más complejo es cuando el individuo es capaz de explicar y comprender el contexto a partir de sus resultados y por tanto, requiere que el individuo haya superado todos los tipos de pensamiento predecesores.

A continuación se detalla los aspectos que comprenden cada uno de los tipos de pensamiento estadístico que fungirán como base para el análisis de los datos de esta investigación:

1. **Reconocimiento de la necesidad de los datos (ND):** El reconocimiento de lo inadecuado de las experiencias personales y de la evidencia anecdótica que conduce a un deseo de fundamentar las decisiones de los datos deliberadamente recolectados, es un impulso estadístico.
2. **Transnumeración (T):** Se define como transformaciones numéricas hechas para facilitar la comprensión. La transnumeración ocurre cuando encontramos formas de obtener datos (a través de la medida o de la clasificación) que capturan elementos significativos del sistema real. La transnumeración penetra todos los análisis estadísticos de datos, ocurriendo cada vez que

cambiamos nuestra manera de observar los datos con la esperanza de que esto nos conduzca a un nuevo significado. La transnumeración es un proceso *dinámico* para cambiar representaciones que engendren comprensión

3. **Consideración de la variación (V):** Pensando en lo estadístico, de cualquier manera en el sentido actual, tiene que ver con el aprendizaje y la toma de decisiones bajo incertidumbre. Mucha de esa incertidumbre proviene de la omnipresente variación. El interés en la variación también se extiende más allá de “medir y modelar” para investigar estrategias tales como la aleatoriedad y el agrupamiento en bloques.  
Cualquier discusión seria del pensamiento estadístico debe examinar el papel de la “variación”. Los primeros tres mensajes de la “variación” son: la variación es omnipresente; la variación puede tener serias consecuencias prácticas; y la estadística nos da un medio de contender con un mundo acosado por la variación
4. **Razonamiento con modelos estadísticos (ME):** Todo pensamiento usa modelos. La principal contribución de la disciplina estadística al pensamiento ha sido su propio conjunto distintivo de modelos o estructuras para pensar acerca de ciertos aspectos de la investigación en forma genérica. Hay una necesidad de expandir el alcance de nuestros modelos estadísticos.
5. **Integrando el conocimiento del contexto y conocimiento estadístico (ICE):** Las materias primas con que trabaja el pensamiento estadístico son el conocimiento estadístico, el conocimiento del contexto y la información en los datos. El pensamiento mismo es la síntesis de estos elementos para producir implicaciones, perspicacias y conjeturas. El árido panorama, libre de contexto, sobre el que están contruidos tantos ejemplos usados en la enseñanza de la estadística asegura que un gran número de estudiantes nunca ven siquiera el pensamiento estadístico, si no están interesados. Uno tiene que aplicar todo el conocimiento relevante, sin importar la fuente, a la tarea a la mano y luego hacer conexiones entre el conocimiento del contexto existente y los resultados de los análisis para acceder a un significado.

## METODOLOGIA

La investigación corresponde a un estudio de caso aplicado en el Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) durante el II semestre de 2011. Se trabaja con 9 profesores en formación de un curso de Métodos Estadísticos para la carrera Enseñanza de la Matemática asistida por Computadora, quienes no había tomando algún curso de probabilidad o estadística en su carrera. El investigador fue el profesor de este grupo.

Se utilizan como instrumentos de recolección de datos notas de campo, reportes escritos de las actividades desarrolladas, archivos computacionales, entrevistas y sesiones video grabadas.

Se implementaron siete sesiones distribuidas de la siguiente manera:

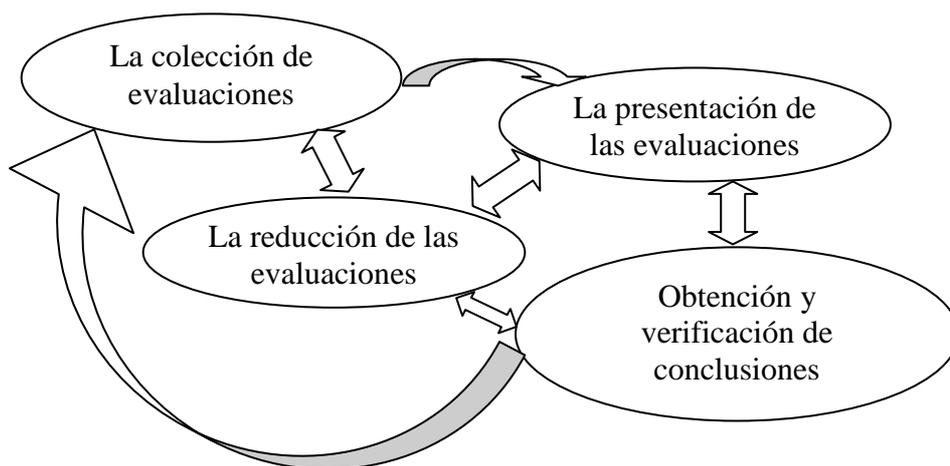
- a) Una sesión de cuestionario de diagnóstico.
- b) Una sesión de conocimiento del software.
- c) Una sesión de investigación sobre medidas de tendencia central y variabilidad.
- d) Tres sesiones para cinco actividades-problema sobre distribuciones muestrales.
- e) Una sesión para el cuestionario posterior.

Las sesiones fueron semanales con una duración de dos horas cada una, para 14 horas de trabajo.

Al inicio de cada actividad-problema, los estudiantes debían responder a un diagnóstico previo, cuya duración era de cinco a quince minutos y consistía de dos o tres preguntas claves que tenían relación con el trabajo que se llevaría a cabo en el transcurso de la sesión. El objetivo de este diagnóstico era comparar las respuestas obtenidas antes de la instrucción (debía responderse sin ayuda tecnológica ni del profesor investigador), con los resultados al final de la experiencia de aprendizaje.

Las actividades se desarrollaron en parejas, aunque no se restringía el intercambio social entre ellas. A excepción de los cuestionarios diagnóstico y posterior, los cuales fueron individuales. El profesor investigador y su asistente invitaron a los estudiantes a la reflexión y a la discusión. Estos intervenían para aclaraciones, formulaban preguntas claves que resaltaran aspectos relevantes y dirigían la palabra en la presentación y discusión del trabajo al final de cada actividad.

El análisis cualitativo de las actividades implementadas se lleva a cabo mediante cuatro actividades coexistentes (sugeridas por Miles & Huberman, 1994):



Modelo de análisis de datos (Miles & Huberman, 1994, p. 12)

## RESULTADOS

Las respuestas del cuestionario de diagnóstico de los profesores en formación evidencian que se debe instruir en reconocer la necesidad de datos, pues sus deducciones con respecto a ellos muchas veces son subjetivas y basadas en la experiencia.

La siguiente tabla muestra los resultados de los nueve estudiantes en la prueba de diagnóstico:

Tabla 1. Resultados de examen de diagnóstico (con base en 100) de los profesores participantes en la investigación

Profesor	Calificación
P1	25
P2	60
P3	40
P4	20
P5	2,5
P6	25
P7	30
P8	30
P9	45

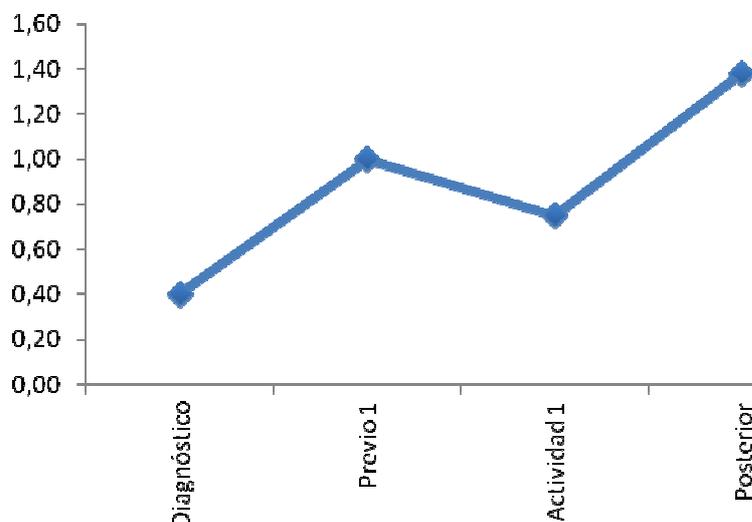
El promedio es de 30,83 y su desviación estándar de 16,3.

Se analizan las preguntas de los cuestionarios (diagnóstico y posterior) y la actividad de la sesión tres (actividad 1) correspondientes propiamente a medidas de tendencia central y variabilidad. Se analiza el trabajo de cinco estudiantes correspondiente a parejas distintas de trabajo.

## Análisis descriptivo

Se muestra el análisis completo del profesor P4 con el fin de ilustrar las preguntas que se realizaron en los cuestionarios así como en la actividad.

Gráfico 1. Rendimiento general del estudiante P4



El promedio general es de 0.88 (cuyo máximo es dos), lo que muestra un rendimiento promedio intermedio. La desviación estándar es de 0.41. P4 tuvo un rendimiento creciente en el desarrollo de las actividades según el comportamiento gráfico.

### Análisis cualitativo

#### *Cuestionario de diagnóstico*

En la pregunta 2, centra su respuesta en dar el valor de lo que cree sería la moda del número de niños en los hogares.

2. En el barrio Los Ángeles, ubicado en Cachí de Cartago, hay un total de 50 casas. El comité de bienestar estudiantil de la escuela de este barrio ha decidido determinar el número promedio de niñas y niños que hay por casa en este barrio. Los encargados del comité dividieron el total de infantes por 50, el promedio de niños y niñas que obtuvieron fue de 2,2 ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones considera usted que es verdadera?

- ( ) La mitad de las casas en el pueblo tiene más de 2 niños
- ( ) Hay más cantidad de casas en el pueblo que tiene 3 niños que las que tienen 2
- ( ) Existen un total de 110 niños en el pueblo
- ( ) Existe 2.2 niños en el pueblo por cada casa.
- () El número más común de niños en una casa es 2
- ( ) Ninguna de las anteriores

Muestra contradicciones al contemplar la variabilidad, pues en la pregunta 3 selecciona la distribución B y lo justifica diciendo que tiene mayor número de calificaciones distintas, pero existen más calificaciones distintas en la distribución A pues varían de 0 a 10.

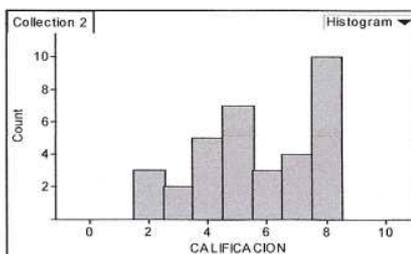
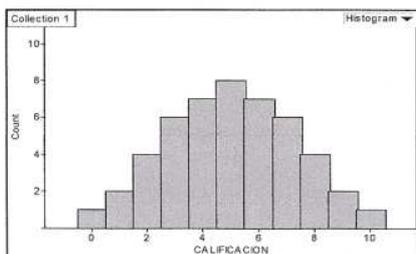
VIII FESTIVAL INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

7 al 9 de junio de 2012. Sede Chorotega, Universidad Nacional, Liberia, Costa Rica

3. ¿Cuál de las siguientes distribuciones tiene más variabilidad?

( ) Distribución A

(X) Distribución B



Marque el o los enunciados que le permitieron seleccionar la distribución anterior

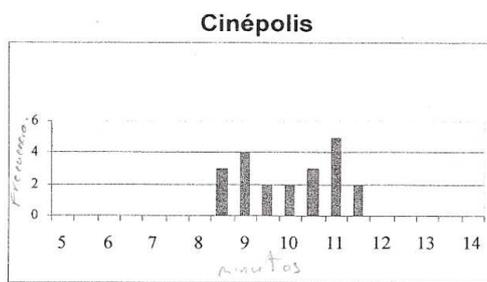
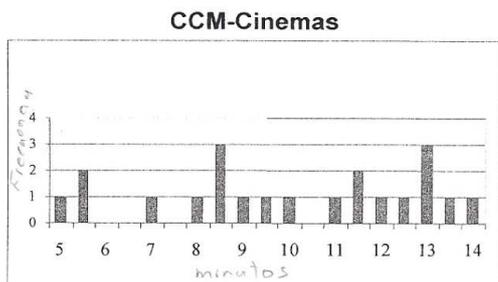
- ( ) Porque es más irregular
- ( ) Porque es más extendida
- (X) Porque tiene un mayor número de calificaciones distintas
- ( ) Porque los valores difieren más del centro
- ( ) Otro. ¿Cuál? \_\_\_\_\_

En la pregunta 8 contempla de manera correcta la variabilidad en ambos gráficos, donde nota la concentración de los tiempos alrededor de 8 a 12 minutos en el caso de Cinépolis, y las amplias diferencias en CCM. Además justifica correctamente su elección por Cinépolis.

8. Una costumbre reciente en los cines es mostrar anuncios comerciales y cortos en la pantalla antes de comenzar la película. El tiempo de espera para una película es la diferencia entre el tiempo de comienzo anunciado y el tiempo real en que comienza la película. En un grupo de 21 estudiantes investigó el tiempo de espera de dos cines de las cadenas CCM-Cinemas y Cinépolis. Cada estudiante asistió a dos funciones, una película en cada cine, y registró los tiempos de espera en minutos, como aparece a continuación.

CCM-Cinemas							Cinépolis						
5.0	12.0	13.0	5.5	9.5	13.0	5.5	11.5	11.0	9.0	10.5	8.5	11.0	9.0
11.5	8.0	8.5	14.0	13.0	8.5	7.0	10.5	9.5	8.5	10.0	11.5	10.5	8.5
8.5	12.5	13.5	11.5	9.0	10.0	11.0	9.0	11.0	11.0	9.5	10.0	9.0	11.0
Media=10 min. Mediana = 10 min.							Media=10 min. Mediana = 10 min.						

Se graficaron los resultados de la siguiente manera:



a) Un estudiante en clase argumenta que en realidad no hay diferencia en los tiempos de espera de esos cines, ya que los promedios (media y mediana) son los mismos. ¿Estás de acuerdo con él? ¿Por qué?

No porque aunque el promedio sea el mismo, en la tabla se puede notar que regularmente en Cinépolis el tiempo está en 8-12 minutos mientras en CCM es muy variable

b) ¿Cuál de las cadenas de cine elegirías para ver una película? ¿Por qué?

Cinépolis porque se conoce que el tiempo de anuncios es más regular, se puede esperar cuánto duran.

No responde a la pregunta 12 sobre los análisis de los diagramas de caja que contemplan los hábitos de sueño de los estudiantes. Esta misma pregunta se realiza en el cuestionario posterior.

P4 presenta en esta prueba de diagnóstico un pensamiento estadístico basado en la necesidad de datos, pues busca mencionar datos para explicar sus razonamientos, sin embargo algunas veces se deja llevar por impulsos estadísticos.

*Actividad 1*

En el previo de la actividad 1 su forma de pensamiento la basa en transnumeración, pues explica su razonamiento obteniendo la esperanza, sin embargo no contempla la variabilidad:

Imagine que se lanza 60 veces el dado. Complete la siguiente tabla escribiendo cuántas veces cree que saldrá cada número.

Caras del dado	Número de veces
1	10
2	10
3	10
4	10
5	10
6	10
<b>Total</b>	<b>60</b>

$\rightarrow \frac{1}{6} \cdot 60 = 10$   
 $\rightarrow \frac{1}{6} \cdot 60$

¿Por qué considera que se obtiene esa cantidad de veces cada cara del dado?

*Porque cada cara tiene la misma probabilidad*

En el desarrollo de la actividad se le solicita en la I Parte que lance el dado 60 veces mediante el software Fathom

4. Cuente la cantidad de veces que salió cada una de las caras del dado (*count* dado = 1, entre otros). Complete la siguiente tabla escribiendo cuántas veces salió cada número.

Caras del dado	Número de veces
1	11
2	3
3	11
4	12
5	15
6	8
<b>Total</b>	<b>60</b>

5. Estos resultados que obtuvo, son los valores que usted esperaba antes de realizar el lanzamiento de dado durante 60 ocasiones, ¿Por qué?

*NO, porque pensamos que todos tenían la misma probabilidad, o sea, pensamos en un caso ideal donde todos salían 10 veces*

9. ¿La cantidad de las veces que se obtuvo cada cara coincide en los dos lanzamientos?

¿Es la moda la misma, o cambió? ¿Por qué lo considera de esta manera?

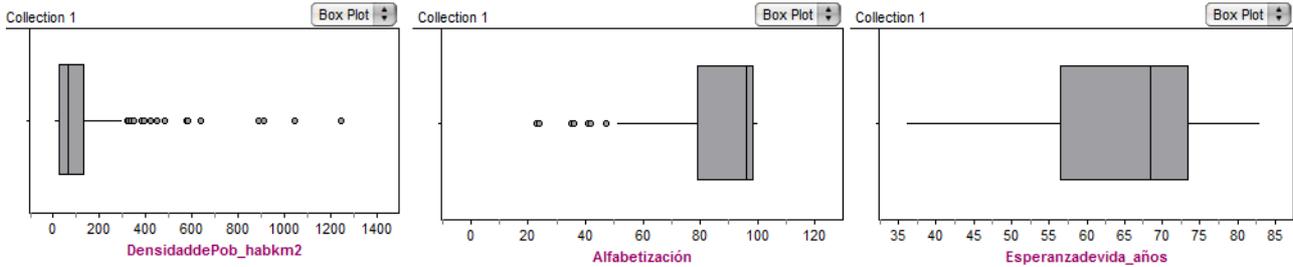
*No coinciden las veces de cada cara y la moda tampoco. Porque al ser con reemplazo la cantidad de veces que puede aparecer cada cara va a ser más variada.*

12. Observe la distribución uniforme que se obtuvo en el paso anterior, ¿por qué considera que la distribución empírica no se ajusta a la distribución teórica obtenida?

Porque en la distribución teórica es el ideal, donde la probabilidad de cara es  $\frac{1}{6} = 0,167$ , mientras en la empírica varían las probabilidades.

P4 empieza a contemplar la variabilidad discriminando entre las probabilidades teóricas y lo que empíricamente se obtiene al simular el lanzamiento del dado.

En la parte II de la actividad se les solicita analizar tres variables construyendo sus diagramas de barras:



Densidad de población:

La mayoría de los países tienen una densidad de población entre 0 y 150 habitantes por km<sup>2</sup>

%Alfabetización:

En términos generales, la mayoría de los países poseen un porcentaje muy alto de alfabetización, entre 80% y 100%, puesto que la mediana es de aproximadamente 95%.

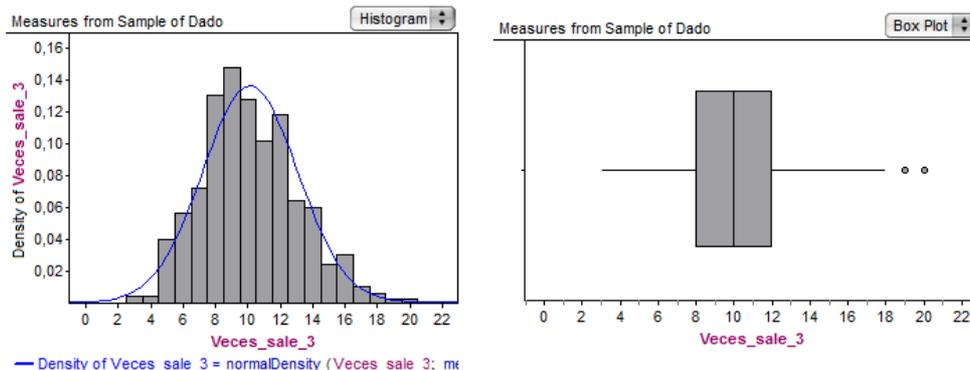
Esperanza de vida en años:

Las personas de estos países, en su mayoría, tienen una esperanza de vida entre los 55 y 75 años, con una mediana cercana a los 67 años.

Centra su atención en dar intervalos para referirse a lo que cree estarán la mayor cantidad de datos, sin embargo no menciona específicamente qué porcentaje de datos están en esos intervalos ni tampoco se refiere a qué tan variable son los datos entre percentiles. Además, da algunos valores de medianas para fortalecer sus argumentos.

En la parte III de la actividad se pide realizar un experimento 500 veces que consiste en lanzar un dado 60 veces y contar el número de veces que ocurrió 3:

Logra realizar los experimentos, construir el histograma de los datos y una distribución normal sobre la misma gráfica:



Sin embargo, al consultarse sobre el análisis de la gráfica su respuesta es endeble y no contempla la variabilidad:

6. ¿Qué forma tiene la distribución obtenida? 9. ¿Qué relación existe entre la distribución teórica y la distribución empírica?

*Simétrica*

7. ¿Cuál el valor más frecuente, cómo se explica ese valor? 10. Construya un diagrama de caja y explique el comportamiento de los datos.

*El valor más frecuente es 9,*

*La mediana se encuentra en 10 y el rango está entre 3 y 20*

En la actividad se ubica nuevamente en el nivel de transnumeración, pues busca dar valores numéricos para tratar de explicar el comportamiento de los datos, sin embargo, los intentos por contemplar la variabilidad sólo se muestran en la primera parte de la actividad, aunque mejoró con respecto a la prueba de diagnóstico.

*Cuestionario posterior*

P4 mostró una clara mejoría en su forma de pensamiento con respecto al diagnóstico y la actividad pasando de transnumeración a considerar la variación, pues en la primera pregunta da un valor aproximado a lo que se espera:

1. Suponga que se tiene una caja que contiene 1000 confites de igual forma y peso (mezclados dentro de la caja), de los cuales 600 son azules y 400 son amarillos. Tres estudiantes hacen un experimento donde cada uno sacará 100 confites. Luego de que el primer estudiante saque sus 100 confites, deberá regresarlos a la caja para que el siguiente estudiante realice su experimento, y así sucesivamente para los siguientes.

*Az = 600  
Am = 400*

- i. ¿Qué piensa que podría ocurrir con el número de confites amarillos que cada estudiante sacará de la caja?

*Deberían sacar menos confites amarillos que azules, aproximadamente 40 por cada estudiante*

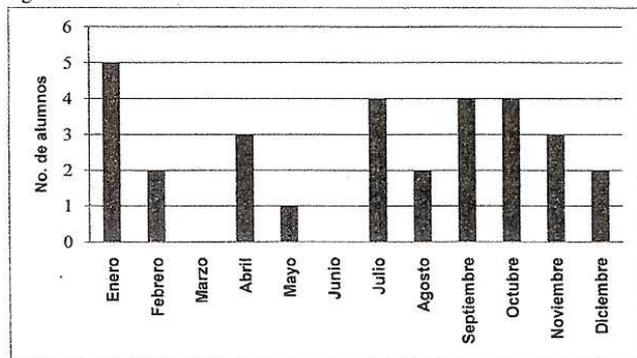
- ii. ¿Por qué piensa que eso es lo que puede ocurrir?

*Porque si  $X$  # confites amarillos, entonces  $P = \frac{400}{1000} = 0,4$*

En la pregunta 5 y 6 responde y justifica correctamente basándose en la probabilidad teórica, pero contemplando la variabilidad de los datos. Tampoco se deja llevar por los picos u hoyos que existen tanto en el gráfico de la pregunta 5, como en las tablas de la pregunta 6:

5. A un grupo de 30 alumnos se les preguntó el mes en que cumplían años, estos datos fueron graficados como se muestra a continuación.

Costa Rica



- i. ¿El día de la encuesta faltó Rocío a clases, en cuál mes cree que cumple años Rocío? ¿Por qué?

*En cualquier mes porque las fechas de cumpleaños no se ven condicionadas a ninguna circunstancia.*

- ii. Si tiene que explicar la variabilidad de los datos a un amigo, ¿qué le diría?

*Que se presentan nacimientos en todos los meses excepto marzo y junio. Con mayor incidencia en los meses de enero julio, setiembre y octubre.*

VIII FESTIVAL INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

7 al 9 de junio de 2012. Sede Choroteaga, Universidad Nacional, Liberia, Costa Rica

6. Se tiene una urna con muchas bolas. Cada bola tiene una letra (A, B ó C). La probabilidad de extraer una bola de cualquier letra es la misma. Juan saca una bola sin ver, anota en una tabla la letra que corresponde a la bola y la regresa a la urna. Juan repite el experimento 30 veces. ¿Cuál de las siguientes tablas cree que sea la que obtuvo Juan? Marque la tabla que considere correcta.

Letra	# de bolas
A	12
B	7
C	11
<b>Total</b>	<b>30</b>

Tabla 1

Letra	# de bolas
A	13
B	17
C	0
<b>Total</b>	<b>30</b>

Tabla 2

Letra	# de bolas
A	10
B	10
C	10
<b>Total</b>	<b>30</b>

Tabla 3

- a. ¿Por qué eligió esa tabla?

Por descarte, pues la tabla 3 es el caso ideal y respecto a la tabla 2 me parece muy difícil que existiendo la misma propabilidad no se haya extraído ninguna bola C. La tabla A parece más real.

En la pregunta 7 logra construir en forma correcta los gráficos solicitados, sin embargo menciona en forma incorrecta que la distribución del Bloque B tiene mayor variabilidad, pues no considera que hay mayor dispersión de datos según el gráfico del Bloque A.

7. Los siguientes bloques A y B, contemplan seis mediciones de un mismo objeto:

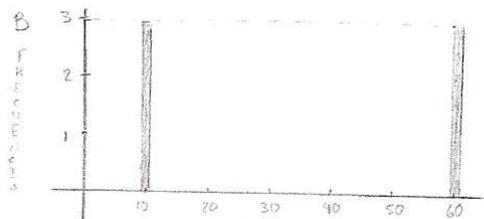
Costa Rica

Bloque A			Bloque B		
10	20	30	10	10	10
40	50	60	60	60	60

$$\bar{x} = 35 \quad \bar{x} = 35$$

$$\sigma = 18,71 \quad \sigma = 27,39$$

- i. Construya el histograma de cada bloque.

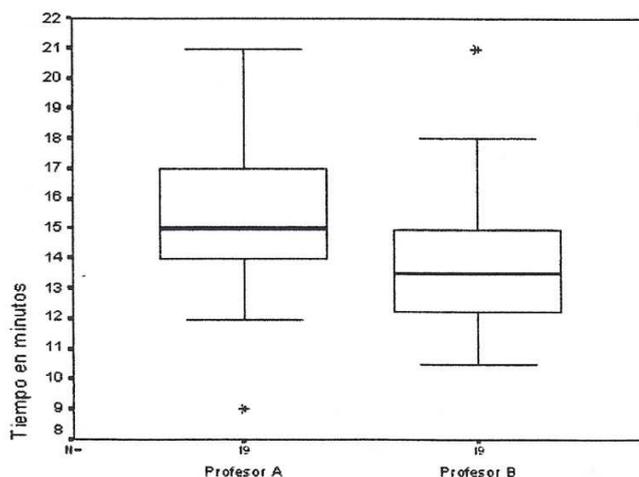


- ii. ¿Cuál de los dos bloques presenta mayor variabilidad? Justifique

El bloque B, porque presenta los datos más alejados de la media que el bloque A.

En la siguiente pregunta realiza un análisis correcto de comportamiento de las gráficas, aunque confunde la media con la mediana.

10. Dos profesores A y B, están interesados en estudiar los hábitos de sueño de los estudiantes en sus clases. Ambos profesores registran el tiempo (en minutos) que demoran en quedarse dormidos sus alumnos desde que empieza la clase. La siguiente gráfica muestra los tiempos que demoran en quedarse dormidos los estudiantes, tanto del profesor A como del profesor B.



De acuerdo con la información dada, ¿qué puede concluir acerca de la información que suministra la gráfica?, como por ejemplo las medidas de dispersión del tiempo, porcentaje de estudiantes que se quedan dormidos antes de cierto tiempo, entre otras medidas de variabilidad.

Para el profesor A, la media de los estudiantes se quedan dormidos a los 15 min de iniciada la clase y comienzan a quedarse dormidos a partir de los 12 min, sin embargo, tiene estudiantes que aguantan hasta 21 min sin dormirse después de iniciada la clase.

Mientras el profesor B tiene aproximadamente la mitad de la clase dormida a los 13 min y ningún estudiante aguanta despierto más de 18 min después de iniciada la clase.

La Tabla 2 resume los niveles de pensamiento mostrados en todo el proyecto.

Tabla 2. Niveles de razonamiento mostrados por P4

	ND	T	V	ME	ICE
Diagnóstico	X				
Previo 1		X			
Actividad 1		X			
Posterior			X		

Sobre las ventajas de utilizar Fathom menciona:

13. ¿Cuáles fueron las ventajas, desventajas, virtudes o limitaciones que se le presentaron al utilizar Fathom en el estudio de las distribuciones muestrales?

Muestra algunos pasos que facilitan la comprensión, sencillo pero completo y permite realizar gráficas fácilmente. Lamentablemente no es gratuito.

La Tabla 3 muestra el rendimiento de los cinco profesores en todas las actividades realizadas.

Tabla 3. Formas de pensamiento mostrados por los profesores por actividad

	Diag	Prev 1	Act 1	Post
P1	ND	T	V	V
P2	ND	T	V	V
P3	ND	T	T	T
P4	ND	T	T	V
P5	ND	T	T	V

Se deduce que el desarrollo de las actividades permitió aumentar, en los profesores, las formas de pensamiento mostrados en el diagnóstico y los previos, ya que en la mayoría de los casos se da un aumento en sus formas de pensamiento.

## CONCLUSIONES

Según la pregunta de investigación, las formas de pensamiento iniciales que muestran los sujetos sobre variabilidad son endebles, lo que evidenció la falta de reconocimiento de la necesidad de los datos.

El cuestionario de diagnóstico evidenció, como manifiestan Garfield y colegas (2004), que se debe instruir con suficiente atención en la idea de variación, la idea de distribución, la distribución normal y la idea de muestreo.

Sin embargo, casi todos los sujetos superaron las formas de pensamiento del cuestionario de diagnóstico en la prueba final, alcanzando niveles intermedios. Mismo comportamiento creciente se dio con el desarrollo de la actividad. Ninguno alcanzó los dos últimos niveles.

Para alcanzar niveles altos de pensamiento, se recomienda incorporar la simulación, tanto de material concreto como computacional, en la metodología de los cursos de estocástica, con el fin de que los contenidos se abarquen inicialmente de forma intuitiva para disminuir la brecha de complejidad hacia el formalismo.

Algunas de las ventajas de utilizar la simulación para el estudio de la variabilidad son:

- La cantidad de funciones integradas que presenta el paquete.
- La generación de múltiples muestras y sus distribuciones instantáneas y aleatorias.
- Para comprender comportamientos teóricos.
- Visualización clara, lo que permite el desarrollo de una semiótica.
- Acercamientos apropiados a las distribuciones teóricas con forme se aumentan el número de experimentos.

Dentro de las desventajas mencionadas están dedicársele más tiempo al conocimiento del software, repasar los conceptos que Garfield y sus colegas (2004) mencionaron como claves; además de no ser un software libre.

## REFERENCIAS

- Ben Z-vi, D. & Garfield, J. (2004). Research on reasoning about variability: a forward. *Statistic Education Research Journal*, 3 (2), 4-6.
- Garfield, J. & Ben Z-vi, D. (2005). A framework for teaching and assessing reasoning about variability. *Statistic Education Research Journal*, 4 (1), 92-99.
- Hammerman, J. & Rubin, A. (2004). Strategies for managing statistical complexity with new software tool. *Statistic Education Research Journal*, 3 (2), 17 – 41.
- Kader, G., & Perry, M., (2006). A Framework For Teaching Statistics Within The K-12 Mathematics Curriculum, *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Brazil. [Online]:  
[www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/2B3\\_KADE.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/2B3_KADE.pdf)
- Laskey & Martignon. (2010). Exploration and induction versus confirmation and deduction. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eight International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)*. Ljubljana, Slovenia.
- Makar, K & Confrey, J. (2005). “Variation-talk”: articulating meaning in statistics. *Statistic Education Research Journal*, 4 (1), 27-53.
- Miles, M. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook*. SAGE Publications. Segunda edición, Thousand Oaks, California.
- Ministerio de Educación Pública (2005). Programa de Estudio de Matemática: Tercer Ciclo, Costa Rica.
- Ministerio de Educación Pública (2005). Programa de Estudio de Matemática: Cuarto Ciclo, Costa Rica.
- Pfannkuch, M & Wild, C. (2004). Towards and understanding of statistical thinking. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp.17-46). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Pfannkuch, M. (1997). Statistical thinking: One statistician’s perspective. En F. Biddulph & K. Carr (Eds), *People in mathematics education* (pp.406-413). Rotorua, New Zeland: MERGA.
- Shaughnessy, J. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. En F. Biddulph & K. Carr (Eds), *People in mathematics education* (pp. 6-22). Rotorua, New Zeland: MERGA.
- Watson, J & Kelly, B. (2002). Can grade 3 students learn about variation? ICOTS 6.
- Wild, C & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking and empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67.