Números complejos y resolución de ecuaciones algebraicas de grados arbitrarios (2, 3)

Jorge Luis Chinchilla Valverde
Instituto Tecnológico de Costa Rica
jochinchilla@itcr.ac.cr

Norberto Oviedo Ugalde
Universidad de Costa Rica
noviedo2008@hotmail.com

El surgimiento de los números

Al hablar de los primeros pasos de la matemática, es necesario especificar que las matemáticas tempranas requerían de una base práctica para su desarrollo, esa base se presentó paralelo a formas de desarrollo en la sociedad que las formularon. Tal situación aparece en ciudades que se establecieron a lo largo de grandes ríos en África como en Asia, donde nuevas formas de sociedades hicieron su aparición: el Nilo en África, el Tigris y Éufrates en el oeste de Asia, el Indús y luego el Ganges en el centro-sur de Asia, y el Hwang Ho y luego el Yangtze en el este de Asia.

De esta forma, se puede decir que estas matemáticas tempranas se originaron en ciertas áreas del antiguo Oriente principalmente como una ciencia práctica para ayudar en actividades de agricultura e ingeniería.

Estas actividades requerían de computar un calendario útil, desarrollo de sistemas de peso y medidas que sirvieran en la cosecha, almacenamiento y reparto de alimentos, la creación de métodos de agrimensura para el canal y construcción de depósitos, la parcelación de la tierra, y la evolución de prácticas financieras y comerciales para aumentar y recolectar impuestos y para propósitos comerciales.

La historia de las matemáticas empieza con la invención de símbolos escritos para denotar números. Sin ellos, la civilización como la conocemos ahora no podría existir.

De acuerdo con lo anterior, tenemos que en casi todas las civilizaciones históricas se ha desarrollado algún tipo de sistema de numeración, es decir, una aritmética que involucra a lo que conocemos como números naturales. En el campo de los naturales, al sumar dos números cualesquiera siempre obtenemos otro natural. Sin embargo, esto no se cumple con la resta, pues si por ejemplo se resta tres menos cinco el resultado no es un número natural. Esta situación en muchas ocasiones constituye una forma de enseñar los números enteros, que en la mayoría de los contextos se dice que son los naturales más el cero y los números negativos, y que permiten la operación de resta.

Siguiendo esta secuencia, se sabe que los números racionales hacen posible la operación de división, e inclusive podemos decir que es por la misma necesidad de dividir cinco entre tres.

Sin embargo, los números racionales, lo que se les llama comúnmente las fracciones, están lejos de completar toda la recta numérica puesto que entre dos números racionales cualesquiera, hay una cantidad de "huecos" vacíos descomunales. De ahí que hacen su entrada los números irracionales, que son los que no se pueden escribir como una fracción, como por ejemplo la raíz cuadrada de dos o el simpático número π. La unión de los racionales con los irracionales dan los números reales y hasta ahí, llenamos la recta numérica.

La introducción de los números imaginarios es una fase delicada del programa de educación particularmente en secundaria. En nuestro contexto educativo nacional los alumnos han confirmado con frecuencia la imposibilidad de extraer la raíz cuadrada a los números negativos; no obstante, cuando a estos mismos alumnos se les pide resolver, por ejemplo, $x^2 + 1 = 0$ deben aceptar la presencia de un nuevo objeto, el símbolo "$\sqrt{-1}$", al cual, la calculadora simplemente le asigna la denominación i, situación que no puede dejar de causarles cierta incertidumbre.

Es claro que dicha situación constituye una fuente de inseguridad en el pensamiento de muchos estudiantes, quienes por lo regular deben utilizar un objeto matemático, que antes habían considerado ilícito y, por tanto, no utilizable. A fin de afrontar tal eventualidad, hemos considerado necesario adoptar un criterio prudente para evitar formar concepciones falsas y contradictorias respecto a la idea de un número imaginario, que si bien no está contemplado en el temario oficial, es inevitable su aparición y, por ende su explicación.

Por tanto, el presente trabajo se limitará a señalar dicha problemática, teniendo en mente que considerar la evolución histórica de un concepto quizá contribuya a poner en evidencia (y con toda probabilidad encararnos con eficacia) el problema de tales concepciones presentes en los estudiantes.

La historia de los números imaginarios

Muchos conceptos en matemáticas tardaron varios años y hasta siglos en desarrollarse, desde el momento en que fueron descubiertos por primera vez, por alguna mente brillante, hasta la formalización de los mismos. Una de las reglas básicas del desarrollo de la matemática es que cualquier objeto nuevo debe estar claramente definido para ser aceptado por toda la comunidad. Por ello muchas ideas incompletas quedaron relegadas a la oscuridad y el olvido por no encajar en el sistema de razonamiento de la época, como fue el caso de los números complejos.

Los egipcios y babilonios se las arreglaron para elaborar métodos que les permitieron operar con fracciones. Pero los griegos descubrieron que existían cantidades definidas que no podían ser expresadas como cocientes de números enteros, la noción de número extiende más allá, ya que los griegos no aceptaban la existencia de números menores que el cero. Los números complejos aparecen entre las soluciones de las ecuaciones cuadráticas, que generan raíces cuadradas de números negativos los cuales no poseen soluciones reales.

Se sabe que los matemáticos griegos conocían métodos geométricos de resolución, consideraban estos problemas irresolubles, rechazaban el uso de números negativos por la falta de un equivalente dentro de la geometría que para ese momento era el centro de la matemática.

Recordemos que los griegos rechazaron el uso de los números negativos, por la falta de un equivalente dentro de la geometría. Para ellos, todo número representaba la longitud de un segmento o el área de una figura plana. La geometría era considerada entonces como el corazón de toda la matemática y esto, por supuesto, retardó considerablemente el desarrollo de estos números.

Es necesario rescatar, sin embargo que los griegos conocían la extracción de raíces cuadradas y cúbicas, entre ellos se destaca Herón de Alejandría, quien en lo que respecta a los números complejos, es conocido por haber sido el primer matemático en dar con la raíz cuadrada de un número negativo allá por el año 50 d.C. (aproximadamente), este resultado junto con otros estudios y teorías fueron publicados en su tratado llamado La Métrica. Aunque por lo expuesto anteriormente, no se desarrolla este sistema numérico.

Cabe resaltar que es completamente incorrecto decir que la aparición de los números complejos se debió a la imposibilidad de resolver todas las ecuaciones cuadráticas, pues los matemáticos de entonces simplemente no se interesaban en ello. La motivación real de entenderlos, viene de las ecuaciones cúbicas.

Con el surgimiento del álgebra durante la Edad Media, el concepto de número se amplía, para poder manipular las ecuaciones, desligadas ya de la influencia dominante de la geometría. Se desarrolla la libertad e imaginación de ecuaciones y fórmulas que serán el semillero de las grandes ideas que darán impulso a la matemática. Los números, de ahora en adelante, quedarían independientes de sus equivalentes geométricos.

Los números complejos no fueron descubiertos en el sentido usual, sino que aparecieron en el siglo XVI como producto derivado (e incómodo) de la solución de ecuaciones polinomiales. Debe recordarse que inclusive los números negativos tuvieron dificultades para ser reconocidos, al menos en Europa, pues en la India ya habían sido descritas sus propiedades por Brahmagupta en el año 665.

La solución de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ tomo bastante tiempo en conformarse. Abraham bar Hiyya Ha-Nasi, conocido como Savasorda, publica en 1.145 su libro Liber Embaborum donde aparece publicada por primera vez en Europa la solución completa de dicha ecuación, aunque ya el matemático persa al-Khwarizmi, quien dividía su estudio en seis casos, había dado una solución para cada uno de ellos alrededor del año 800. Sin embargo, solo se tomaban en cuenta las soluciones reales. Si aparecía la raíz de un número negativo, se consideraba que la ecuación no tenía solución.

Fué en Italia, durante el período del renacimiento, cuando por primera vez los algebristas se encuentran con expresiones formales donde aparecen raíces cuadradas de números negativos. Pero como se mencionó anteriormente, la motivación principal para entender estas expresiones no viene de las ecuaciones cuadráticas sino de las ecuaciones cúbicas.

¿Por qué la necesidad de los números imaginarios?

El primer matemático que empleó sistemáticamente los números menores que el cero fue el Italiano Girolamo Cardano, quien decía que después de todo puede haber algo menos que nada, “una deuda es menos que nada”.

En 1545, Cardano publica su obra *Ars Magna*, donde expone los métodos para la resolución de la ecuación cúbica. En él, Cardano reconoce a Al-Khwarizmi como el padre del álgebra. En esta obra aparecen muchos resultados originales, como el método para eliminar la x^2 en una ecuación cúbica, conocido como el método de Cardano. Además hizo uso por vez primera de las raíces cuadradas de números negativos y consideró la posibilidad de usar los números imaginarios aunque con mucha cautela.

Ivorra, C. (2011) señala que en principio, los algebristas trataban de resolver ecuaciones con coeficientes reales (normalmente racionales), pero tales ecuaciones pueden tener soluciones imaginarias. Es fácil de percatarse que no es necesario buscar entre ecuaciones cúbicas o cuarticas, sino que modestas ecuaciones cuadráticas como $x^2 + 1 = 0$. Ahora bien, las ecuaciones cuadráticas con discriminante negativo no "promovían" buscar raíces imaginarias, ya que, como se señaló anteriormente, lo más natural era concluir que no tienen solución, y eso "solventaba" el problema. En cambio, cuando una ecuación cúbica tiene tres raíces reales distintas que pueden ser conocidas si uno "se la construye" para verificar la fórmula de Cardano -resulta que esta proporciona expresiones para dichas raíces en la que aparecen raíces cuadradas de números negativos. Fue esto lo que indujo a los matemáticos a plantearse que tal vez fuera posible operar coherentemente con cantidades "imaginarias" de manera que, simplificando las expresiones imaginarias que proporciona la fórmula de Cardano, se pudiera llegar finalmente a las soluciones reales de la ecuación.

En una nueva edición de su libro, en 1570, Cardano se adentra un poco más en el misterio de estos números y da algunas reglas para manipularlos. Por ejemplo, la expresión:

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40$$

Fueron entre las soluciones a la ecuación cúbica en el libro de Cardano donde se dio el nacimiento de los números complejos, como algo digno de ser estudiado por los matemáticos. En particular, para la ecuación.

$$x^3 = 3px + 2q$$

Cardano nos da la solución:

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[2]{(q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

Scipione del Ferro- Tartaglia-Cardano. La cual se retomará más adelante.

El término imaginario para estas cantidades fue acunado por Descartes en 1637. Como muestra de la reticencia que causaron, podemos citar que los números imaginarios fueron llamados sofistas por Cardano, absurdos por Napier, inexplicables por Girard, incomprensibles por Huygens e imposibles por algunos.

La existencia de los números complejos no fue completamente aceptada hasta finales del siglo XVIII, en que Wessel y Argand hicieron una interpretación geométrica. Gauss, popularizó esta interpretación y es el primero en utilizar el nombre de números complejos, mostrando en 1799 que una ecuación polinomial de grado n posee n soluciones de la forma $\boldsymbol{a+bi}$. El símbolo i para representar a $\sqrt{-1}$ había sido inclido por Euler.

¿Qué son los números complejos?

En secundaria suele encontrarse con inquietudes o preguntas como estas ¿Cómo se puede hablar de una raíz cuadrada de -1, si tanto se ha dicho que los números negativos no tienen raíz cuadrada? ¿No era que $\mathbb{R}$ es completo? ¿Existe un conjunto más amplio que el de los reales? Estas interrogantes constituyen nuestro punto de partida u orientación y se trata de darle un panorama más amplio al docente de secundaria para cuando se encuentre ante tales cuestionamientos y pueda con fundamento teórico darle respuesta a los educandos de las mismas.

Usualmente se atribuye que el número -1 no tiene una raíz cuadrada real, en el sentido de que no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$. La clave está en que x sea real. Definitivamente no existe un número real x tal $x^2 = -1$. ¿Pero podría existir otro número, que no sea real, cuyo cuadrado sea -1? Debe ser "irreal".

Antes de dar respuesta a estas preguntas repasemos un poco a cerca del conjunto de los números reales.

Recordemos un número real puede verse como un punto sobre una recta en la cual se ha tomado un punto fijo O como origen y se han definido dos direcciones, una positiva y otra negativa. Bien podemos tomar el eje X como esa recta. Consideramos ahora el plano cartesiano XY, y defínase para en el plano puntos (a, b) y (c, d) con a, b en $\mathbb{R}$:

Suma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Multiplicación: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Es fácil comprobar que las operaciones con el conjunto de todos los puntos del plano definidas anteriormente, poseen todas las propiedades comunes a las operaciones con los números: la suma y el producto de los puntos en el plano son conmutativo, asociativo, distributividad.

Señalemos que el hecho de que la suma y el producto de los puntos son asociativos permite introducir de modo unívoco la suma y el producto de cualquier número finito del plano. Para los puntos del plano también se cumplen ahora la resta y división, inversas, respectivamente, a la suma y al producto, definiendo:

Resta: $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$

División: $\dfrac{(a, c)}{(c, d)} = \left(\dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$

Aplicando nuestras definiciones a los puntos que se encuentran en el eje de las abscisas, es decir, a los puntos tipo,$(a, 0)$ obtenemos:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$
$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$$

Es decir, la suma y el producto de estos puntos se reducen a la suma y al producto de sus abscisas. Esto es válido también para la resta y la división:

$$(a,0)-(b,0)=(a-b,0)\frac{(a,0)}{(b,0)}=\left(\frac{a}{b},0\right)$$

Podemos decir que todos los puntos del plano que tienen coordenadas $(a,0)$ con a en $\mathbb{R}$ están sobre el eje X y que por lo tanto corresponden a números reales, es decir, si identificamos el punto $(a,0)$ con el mismo número a, entonces el eje de las abscisas se transforma simplemente en la recta de los números reales (eje numérico).

Ahora podemos considerar que un nuevo sistema de números en el plano contiene en particular todos los números reales, más exactamente, los l contiene en calidad de puntos del eje de las abscisas.

Los puntos del eje de las ordenadas no pueden ser identificados con números reales. Veamos por ejemplo, el punto $(0,1)$, que se encuentra en el eje de las ordenadas a la distancia de 1 por encima del punto O(origen). Designemos este punto por la letra $\boldsymbol{i}$ y $i=(0,1)$. Y hallemos su cuadrado, en el sentido del producto de los puntos en el plano:

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)$$

El punto $(-1,0)$ se encuentra no en el eje de las ordenadas sino en el eje de las abscisas y por ello representa al número real -1, es decir:

$$i^2=-1$$

De esta forma contestando a interrogantes planteadas inicialmente, vemos que existe un conjunto de números no reales "irreales" que son una extensión de los números reales, a estos números irreales se les llama formalmente "imaginarios" . Es decir, el conjunto de los números complejos incluye a todos los números reales y a otros números también llamados imaginarios. La base de los números imaginarios es el número denotado por $\boldsymbol{i}$ y definido de la siguiente forma:

El número $\boldsymbol{i}$ es la raíz cuadrada de -1, es decir, un número que $\boldsymbol{i}$ tal que $\boldsymbol{i^2=-1}$

Por tanto ahora queda resuelto el problema de poder calcular por ejemplo $\sqrt{-2}$ y demás radicales de índice par con subradical negativo.

Ejemplos:
a) $\sqrt{-16}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}=4i$, en efecto $(4i)^2=4^2\cdot i^2=16\cdot -1=-16$
b) $\sqrt{-20}=\sqrt{20}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{20}\cdot i=2\sqrt{5}i$, en efecto $\left(2\sqrt{5}\cdot i\right)^2=4\cdot 5\cdot i^2=20\cdot -1=-20$.

Combinando los números reales con los números imaginarios conseguimos los números complejos.

Definición de números complejos: Un número complejo $\boldsymbol{z}$ es un de la forma $\boldsymbol{z = a + bi}$ con a, b pertenecientes a $\mathbb{R}$. El número a se le llama la parte real de z y al b se le llama la parte imaginaria de z.

Ejemplos:
a) $z = 15 + 7i$ donde 15 =parte real y 7=parte imaginaria.
b) $z = \dfrac{5i - 17}{2}$ donde $\frac{5}{2}$ =parte real y $\frac{7}{2}$ =parte imaginaria.

Definición del conjunto de los números complejos: Se define el conjunto de números complejos y lo denotamos por:

$\mathbb{C} = \{(a, b) \text{ tales que } a, b \in \mathbb{R}\}$

Esta definición sugiere que si $z \in \mathbb{C}$ entonces es de la forma $z = (a, b)$. Decimos que (a, b) es la representación cartesiana del número complejo z.

Consideremos ahora un punto cualquiera (a, b) en el plano. A estos puntos los llamaremos números complejos. La representación de estos también se hace usando dos ejes como los ejes cartesianos, pero en un plano complejo, cuya parte real se representa en el eje horizontal, llamado eje real y la parte imaginaria en el eje vertical, llamado eje imaginario.

Operaciones con números complejos

Sabemos que en $\mathbb{R}$ se definen dos operaciones "+" y "· " con una serie de propiedades algebraicas conocidas. Vamos a definir en $\mathbb{C}$ una suma y un producto real. Estas operaciones tienen las mismas propiedades que en $\mathbb{R}$.

Definición: Sean (a, b) y (c, d) números complejos arbitrarios. Se definen la suma y el producto de números complejos de la siguiente manera:

Suma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Multiplicación: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Ejemplo : Sea $z_1 = (3, 5)$ $z_2 = (3, -4)$ $z_3 = (-7, 1)$ Calcule ${z_1}^2 + z_1 \cdot z_3$

- $z_1 \cdot z_1 = (3, 5) = (3 \cdot 3 - 5 \cdot 5, 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3) = (-16, 30) \quad (1)$
- $z_1 \cdot z_3 = (3, 5) \cdot (-7, 1) = (3 \cdot 7 - 5 \cdot 1, 3 \cdot 1 + 5 \cdot -7) = (-26, -32) \quad (2)$

De (1) y (2) se tiene ${z_1}^2 + z_1 \cdot z_3 = (-16, 30) + (-26, -32) = (-42, -2)$

Nota :
Sea K en $\mathbb{R}$. Observe que en su notación como número complejo, k se escribe como $(k, 0)$ y si lo multiplicamos por un número complejo (a, b) se obtiene:

$$(k, 0) \cdot (a, b) = (k \cdot a - 0, k \cdot b + 0) = (k \cdot a, k \cdot b)$$

Es decir, multiplicar un número complejo (a, b) por un número real k, es como multiplicar cada "componente" del número complejo por k. Con esto podemos definir la **resta** de dos números complejos (a, b) y (c, d), en términos de la suma como:

Resta : $(a,b)(c,d)=(a,b)+(-1)(c,d)=(a,b)+(-c,-d)=(a-c,b-d)$

Actividad 1
Calcule el valor de $z=7(5,4)\cdot(-3,9)-(-17,6)\cdot(5,1)$
La notación cartesiana de los números complejos , es decir , como pares ordenados (a,b), no es la más familiar ni la más popular. De ahí es importante escribir cualquier número complejo utilizando el número i, veamos:

Sea $z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=a(1,0)+b(0,1)=a+bi$, a la expresión $a+bi$ se le llama **la forma algebraica o rectangular** del número z. Esta forma se presta más para el cálculo de sumas y productos.

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+i(b+d)$

$(a+bi)\cdot(c+di)=a\cdot c+ia\cdot d+ib\cdot c+i^2b\cdot d=(ac-bd)+i(ad+bc)$

Ejemplos :
Sean $z=4+3i$, $w=2-i$, calcule z^2-5w.

- $z^2=(4+3i)(4+3i)=(4\cdot 4-3i\cdot 3i)+i(4\cdot 3+3\cdot 4)=25+24i \quad (1)$
- $5w=5(2-i)=10-5i \quad (2)$

Luego así tenemos por (1) y (2) que:

$$z^2-5w=(25+24i)-(10-5i)=15+29i$$

NOTA: Es interesante notar que las potencias enteras de I son cíclicas. Esto significa que se repiten en un ciclo.
Actividad 2

Sea $z=7i-2$, $w=2i$, calcule $3z-w^2$ y i^{531}.

Módulo y conjugado de números complejos

Además de la estructura algebraica de los números reales, estamos habituados a trabajar con el concepto de valor absoluto y orden de los números reales. No es posible definir un orden en el conjunto de los números complejos que sea compatible con la estructura algebraica de este. No obstante, la noción de valor absoluto es la misma que en $\mathbb{R}$, esto es, representa la distancia del origen al número complejo (a,b).

Definición Módulo: Se llama módulo del número complejo $z=a+bi$ a su longitud, es decir, su distancia desde el origen. El módulo se denota con el símbolo $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Definición de conjugado: Si $z=a+bi$ es un número complejo, su conjugado es $\overline{z}=a-bi$.

Note que se conserva idéntica la parte real mientras que la parte imaginaria cambia de signo.

División de números complejos: Si z y $w\in\mathbb{C}$ con $z\neq 0$ entonces $w\div z=\dfrac{w}{z}\cdot\dfrac{\overline{z}}{\overline{z}}$

Ejemplo: Calcule $\dfrac{z_1}{z_2}$ si $z_1=1+i$ y $z_2=5+2i$.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{1+i}{-5+2i} \cdot \frac{-5-2i}{-5-2i} = \frac{-3}{29} - \frac{7}{29}i$

Actividad 3

¿Puede decir cuál es el conjugado de un número real?, además¿Cuánto vale $\overline{\overline{z}}$?

Calcule $\frac{z_1}{z_2}$ si $z_1 = i - 4$ y $z_2 = 1 + 3i$

Extracción de la raíz cuadrada de un número complejo

Supongamos se quiere extraer la raíz cuadrada de un número de la forma $\boldsymbol{a+bi}$, luego queremos hallar un número $\boldsymbol{x+yi}$ tal que su cuadrado sea $\boldsymbol{a+bi}$. Tendremos que:

$$\sqrt{a+bi} = x + yi$$

donde x,y son números reales. En tal caso $a + bi = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Luego, utilizando la igualdad de números complejos se tiene que debe darse:

$$a = x^2 - y^2, \text{ además } b = 2xy$$

Resolviendo el sistema para x,y;

$$\begin{aligned} y = \frac{b}{2x} \quad &\Rightarrow \quad x^2 - \left(\frac{b}{2x}\right)^2 = a \\ &\Rightarrow \quad 4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2} \end{aligned}$$

Como x^2 debe ser positivo se tiene que $x^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ y al sustituir en la ecuación $a = x^2 - y^2$:

$$y^2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

Así, entonces $x = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$.

La ecuación $2xy = b$ demuestra que el producto $\boldsymbol{xy}$ tiene el mismo signo que $\boldsymbol{b}$. Por lo tanto si $b > 0$, x e y tienen el mismo, por otro lado si $b < 0$, se tiene x e y poseen signos contrarios. Por lo tanto finalmente:

Si $b > 0$ entonces, $\sqrt{a+bi} = x + yi = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$.

Si $b < 0$ entonces $\sqrt{a+bi} = x + yi = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$.

En la práctica estas fórmulas no se utilizan, sino se realiza el paso dado los cálculos de x e y en cada caso por separado.

Ejemplo: Para extraer la raíz cuadrada del número complejo $\sqrt{1+2i}$, hacemos $\sqrt{1+2i} = x+yi$. Elevando al cuadrado a ambos miembros de la igualdad se tiene

$$1+2i = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Igualando la parte real y la imaginaria se establece el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & 1 \\ xy & = & 1 \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 & = & 1 \\ y & = & \frac{1}{x} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x^4 - x^2 - 1 & = & 0 \\ y & = & \frac{1}{x} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ y & = & \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \end{array} \right.$$

Finalmente $\sqrt{1+2i} = x+yi = \pm\left(\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$.

Actividad 4
Encuentre la solución de $x^2 - (4-i)x + (5-5)i = 0$ y exprese el resultado en la forma $z = a+bi$

Teorema Fundamental del Álgebra

Cualquier polinomio de grado $n \leq 1$, con coeficientes reales o complejos, tiene al menos un cero complejo

El nombre de Teorema Fundamental del Álgebra obedece a razones históricas, pues los matemáticos tardaron varios siglos en probar este teorema, y hasta mediados del siglo XIX, el estudio de los polinomios de variable compleja y sus raíces era un tema de importancia fundamental dentro del Álgebra.

Al respecto, Rivero, F (2001) señala que el nombre más apropiado para el teorema debería ser el de "Teorema Fundamental de los Números Complejos". Históricamente, el teorema tiene su origen en los estudios de las ecuaciones del matemático árabe al-Khwarizmi, cerca del año 800 d.c. En 1629 el matemático flamenco Albert Girard(1595-1632) en su libro "*Linvention en algèbre*" asegura por vez primera que toda ecuación polinomial de grado n tiene exactamente n soluciones. A partir de entonces comenzaron a aparecer los primeros intentos de demostraciones del teorema, dentro de un ambiente de seria competencia de carácter matemático, en donde participaron los hombres más destacados a lo largo de varios siglos. El teorema y su demostración se convirtió en iniciativa para la investigación y comprensión de los misteriosos números complejos, que permanecieron ocultos por muchos años, , hasta mediados del siglo XIX, como se mencionó en párrafos anteriores. Las primeras demostraciones tenían fallas serias de rigor matemático e inclusive algunas estaban completamente erradas. Un obstáculo en todo este proceso fue el creer que la afirmación de Girard sobre la existencia de n raíces era algo evidente y que no requería de una demostración. Fue Johann Carl Friedich Gauss (1777-1855), quien logra hacer la primera demostración correcta del teorema en 1799.

Cálculo de raíces de ecuaciones de grado arbitrario (2 y 3)

Solución general de una ecuación de segundo grado

La necesidad en los números complejos apareció en relación con el hecho de que dentro del cuerpo de los números reales no es posible extraer la raíz cuadrada de un número real negativo. Como sabemos esto conduce a que ciertas ecuaciones cuadráticas no posean raíces reales; sin embargo si consideramos el conjunto de los números complejos estas tienen solución, es decir, por ejemplo ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$ que en $\mathbb{R}$ no tiene solución ahora en nuestro nuevo conjunto $\mathbb{C}$ si las tiene. Supongamos ahora que queremos resolver la ecuación general

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

que si aplicamos la formula general para resolver las ecuaciones de segundo grado, se obtienen 3 situaciones distintas dependiendo del valor del discriminante $\triangle = b^2 - 4ac$

1. Si $\triangle > 0$ existen dos soluciones reales distintas, dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. Si $\triangle = 0$ existe una solución real, dada por:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3. Si $\triangle < 0$ no existen raíces o soluciones reales. Sin embargo, ahora podemos dar las dos soluciones complejas de dicha ecuación en la siguiente forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\sqrt{-1}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\triangle}}{2a}$$

Demostración de la fórmula general para solución de una ecuación cuadrática

Sea $ax^2 + bx + c = 0, \text{con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$

Dividiendo la ecuación entre a y completando cuadrados se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\ \left(x + \frac{b}{a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Luego sacando raíz cuadrada ambos miembros y despejando la variable x se tiene ahora:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\ \Leftrightarrow x + \frac{b}{a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \end{aligned}$$

Finalmente reagrupando y ordenado términos se concluye que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo: Encuentre las soluciones de la ecuación:$2x^2 - 3x + 9 = 0$.

Aplicando la formula general: $\triangle = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = -63$, entonces

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-63}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{63} \cdot \sqrt{-1}}{4} = \frac{3 \pm i\sqrt{63}}{4}$$

Solución de ecuaciones de orden tres

Es conocido que Tartaglia y Cardano encontraron una fórmula análoga para ecuaciones cúbicas (en la que aparecen raíces cúbicas, además de raíces cuadradas) y que Ferrari encontró otra más compleja para ecuaciones cuarticas. Es necesario aclarar que en realidad, más que fórmulas, encontraron métodos de resolución que pueden resumirse en sendas fórmulas, si bien, en el caso de las ecuaciones cuárticas, la fórmula es tan compleja que resulta inmanejable, y es preferible describir el proceso de resolución como un algoritmo de varios pasos.

Los resultados de Cardano-Ferrari llevaron al descubrimiento y al estudio de los números complejos. Como se comentó anteriormente, en un principio, los algebristas trataban de resolver ecuaciones con coeficientes reales (normalmente racionales), pero tales ecuaciones podían tener soluciones imaginarias.

Ecuación cúbica general

Vimos que el problema a tratar es la resolución de la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tuvo su comienzo del siglo XVI, donde los números complejos no "*existían*" como tales. Una ecuación con soluciones complejas era considerada una ecuación sin soluciones En resumen, a estas alturas de la historia, se pretendía encontrar una solución real a la cúbica.

A continuación se expondrá el análisis desarrollado por Cardano y está basado en el trabajo previo de Tartaglia. No obstante, hay que reconocer que Cardano evitó aquellas ecuaciones que dieran lugar a raíces (reales) mediante números complejos. En cualquier caso, la técnica utilizada es la original de hace más de 450 años.

Solución de la ecuación cúbica

Lo primero que debemos hacer para resolver una ecuación cúbica es la sustitución $x = y - \dfrac{a}{3}$, Reemplazando en $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + \left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c \\ &= y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right) y + \left(\frac{2a^2}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) \end{aligned}$$

Ahora, si se define $p = b - \frac{a^2}{3}$ y $q = -\left(\dfrac{2a^2}{27} - \dfrac{ab}{3} + c\right)$, podemos escribir la última ecuación de la forma:

$$y^3 + py = q \tag{1}$$

Cardano resolvió la ecuación cúbica $x^3 + 20x = 6x^2 + 33$ con esta técnica de reducción. Mediante la sustitución $x = y - (-6)/3 = y + 2$ la ecuación se transforma en

$$(y^3 + 6y^2 + 12y + 8) + 20\,(y + 2) = 6\,(y^2 + 4y + 4) + 33$$

cuya simplificación resulta: $y^3 + 8y = 9$

Podemos darnos cuenta fácilmente que $y = 1$ es solución, y se tiene que $x = y + 2 = 3$, que satisface la ecuación cúbica. Ahora, vamos a indagar como Cardano resolvió la ecuación cúbica reducida (1). Consideremos la identidad (algebraica)

$$(u - v)^3 = u^3 - v^3 - 3u^2v + 3uv^2 = u^3 - v^3 - 3uv(u - v)$$

que nos da la identidad

$$(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3 \tag{2}$$

Por lo tanto, si encontramos valores de u, v tales que

$$3uv = p,\ u^3 - v^3 = q \tag{3}$$

entonces la identidad (2) se puede reescribir $(u - v)^3 + p\,(u - v) = q$. De este modo, $x = u - v$ será **una** solución de la ecuación cúbica (1). El problema de resolver la cúbica reducida se transforma en el problema de resolver el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} u^3 - v^3 &= q \\ uv &= p/3 \end{aligned}$$

Ahora, se eleva al cuadrado la primera ecuación y la segunda se eleva al cubo y se multiplica por 4, luego se suman ambas, para obtener

$$(u^3+v^3)^2 = u^6+2u^3v^3+v^6 = q^2+\frac{4p^3}{27}$$

De lo anterior tenemos $u^3+v^3 = \sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}$. Ahora, si resolvemos simultáneamente las ecuaciones

$$u^3v^3 = q \text{ y } u^3+v^3 = \sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}$$

se pueden obtener los valores de u^3 y v^3, y por lo tanto de u y v .

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}\right)} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}\right)} = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

y como $x = u - v$ tenemos

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \tag{4}$$

De la anterior , podemos decir que: Si $\triangle = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ y

$$u = \sqrt[3]{q/2+\sqrt{\triangle}}$$
$$v = \sqrt[3]{-q/2+\sqrt{\triangle}}$$

entonces tenemos los siguiente teoremas

Teorema 1
Consideremos una ecuación $x^3+ax^2+bx+c=0$ con coeficientes reales. Entonces:
1. Si $\triangle = 0$ todas sus raíces son reales, y al menos dos de ellas son iguales.
2. Si $\triangle > 0$ la ecuación tiene una raíz real y dos raíces imaginarias.
3. Si $\triangle < 0$ la ecuación tiene tres raíces reales simples.

Teorema 2
Si $\triangle = 0$ hay dos posibilidades:
1. Si $p = q = 0$, entonces la ecuación tiene una raíz triple $x = -a/3$.
2. Si $pq \neq 0$, entonces la ecuación tiene una raíz doble y una raíz simple, dadas respectivamente por

$$x=-\frac{3q}{2p}-\frac{a}{3}\ \text{ y }\ x=-\frac{4p^2}{9q}-\frac{a}{3}$$

Teorema 3 Si $\triangle > 0$, una raíz real viene dada por

$$x=\sqrt[3]{q/2+\sqrt{\triangle}}-\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{\triangle}}-\tfrac{a}{3},$$

donde las raíces cúbicas u y v son reales. Las otras dos raíces son imaginarias, y vienen dadas por

$$x=-\frac{u-v}{2}-\frac{a}{3}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(u+v)i$$

Ejemplo 1:
Para resolver la ecuación $x^3-3x^2+9x-5=0$, el cambio de variable $x=t+1$ la transforma en $t^3+6t+2=0$. Por consiguiente, $\triangle=12+23=9>0$. La raíz real es

$$x=\sqrt[3]{-1+3}-\sqrt[3]{1+3}+1$$

y las raíces imaginarias son $x=-\dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{2}+1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})i$. Considere la ecuación:$x^3+6x=20$. En este caso $p=6$ y $q=20$, de modo que $p^3/27=8$ y $q^2/4=100$, y la fórmula (4) nos da:

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

Bibliografía

Baeza, R.(2009) La ecuación cúbica, su historia y solución.
Disponible en:http://revistadelprofesor.somachi.cl/articulo2.pdf

Bagni, G. T. (2001). La Introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental desempeñada en la educación media. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, marzo, año/vol.4, número 001

García,J.(2011). Álgebra Superior.
Disponible en: http://es.scribd.com/doc/75325225/Algebra-Superior

Ivorra, C (2011) Las fórmulas de Cardano-Ferrari.
Disponible en: http://www.uv.es/ ivorra/Libros/Ecuaciones.pdf

Kúrosch, A. (1976). Ecuacionres algebraicas de grados arbitrarios. Editorial Mir.

Los Números complejos. Disponible en:http://ima.ucv.cl/pdf/ag1/cap4.pdf

Rivero, F. (2001). Una Introducción a los Números Complejos. Disponible en: Una Introducción a los Números Complejos.