MODELAJE MATEMÁTICO COMO MÉTODO DE INVESTIGACIÓN EN CLASES DE MATEMÁTICAS

Nelson Hein[1]
Maria Salett Biembengut[2]

Resumen
Estamos vivenciando, en esta década, una reducción de caminos, una integración de distancias y de diferencias. En todos los sectores reaparecen indicios de mutación. Sin duda, hoy más que antes, dependemos de los conocimientos como savia vital. No es necesaria mucha imaginación para percibir que el futuro de la civilización y de la propia supervivencia va a depender, cada vez más, del conocimiento y de la creatividad de cada individuo. Esto tiene implicaciones y ejerce impactos sobre nuestra tarea como educadores y, en última instancia, en los cambios cada vez más rápidos e intensos; lo único que permanece es el conocimiento. En medio de esa “aire” de cambios, tener conocimiento específico y ejercer la mera transmisión no nos es suficiente para dar cuenta de las tareas. Es fundamental que procuremos obtener, cada día, nuevos conocimientos y habilidades para aplicar y socializar conocimientos. Y es con ese pretexto que la modelización, en especial, la modelización matemática, viene siendo fuertemente defendida como método de enseñanza y de investigación. La Modelización Matemática consiste en el arte de traducir un fenómeno determinado o problemas de la realidad en un lenguaje matemático: el modelo matemático. Como la Matemática no sólo contribuye extraordinariamente para el ejercicio intelectual, sino que también es el lenguaje de la ciencia, y considerando que la modelización matemática está en la raíz de casi todas las creaciones de la humanidad, en la última década hemos venido realizando investigaciones en el sentido de legitimar un método que llamamos Modelación Matemática, que se apropia de la esencia de la modelización en el proceso de enseñanza de Matemática

[1] Universidade Regional de Blumenau – FURB, Brasil. Correo-e: hein@furb.br
[2] Universidade Regional de Blumenau – FURB, Brasil. Correo-e: salett@furb.br

en cualquier nivel escolar. En este artículo, presentamos las principales consecuencias de la Modelación Matemática en la enseñanza del la Matemática. Para eso, inicialmente, haremos una breve explicación sobre Modelización Matemática y Modelación Matemática.

Palabras-clave: modelización, enseñanza, investigación

Modelización Matemática

La Modelización Matemática es un proceso envuelto en la obtención de un modelo. Un modelo matemático de un fenómeno es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, el fenómeno en cuestión. El modelo permite no sólo obtener una solución particular sino también servir de soporte para otras aplicaciones o teorías. En la práctica, ese conjunto de símbolos y relaciones puede estar vinculado a cualquier rama de la matemática, en particular, a los instrumentos fundamentales de las aplicaciones matemáticas.

Como casi toda actividad científica, particularmente, la actividad matemática consiste en crear modelos. Definiciones específicas de la noción de modelo son encontradas para cada especialidad en la literatura. En nuestro caso, la definición que proponemos basta para dar base a la noción que nos concierne que es la de modelización matemática.

El proceso de modelización envuelve una serie de procedimientos, a saber:

- Elección del tema;
- Reconocimiento de la situación/problema → delimitación del problema;
- Familiarización con el tema a ser modelado → referencial teórico;
- Formulación del problema → hipótesis;
- Formulación de un modelo matemático → desarrollo;
- Resolución del problema a partir del modelo → aplicación;
- Interpretación de la solución y validación del modelo → evaluación.

La elaboración de un modelo matemático requiere, por parte del modelador, de conocimientos tanto matemático como de la situación. Y más aún: una buena dosis de intuición y creatividad para interpretar el contexto y discernir cuáles son las variables envueltas (Biembengut, M. S.).

Como la Modelación recorre el camino de la investigación científica, en las últimas décadas, en diversos países, viene creciendo un movimiento en pro de esta metodología en el proceso de enseñanza de la matemática. Preocupaciones sobre qué, cómo, cuánto y para qué enseñar matemática han contribuido en el fortalecimiento de esas investigaciones en el área de la Educación Matemática.

La Modelización Matemática, originalmente, como metodología de enseñanza parte de un tema/asunto y sobre él desarrolla preguntas. Esas preguntas deberán ser respondidas mediante el uso del conjunto de herramientas matemáticas y de la investigación sobre el tema. Se trata, es lógico, de una forma altamente placentera de investigar el tema y es capaz de llevar al alumno a construir conocimientos significativos, sea en forma de conceptos matemáticos, sea sobre el tema que se estudia (Biembengut, M. S. e Hein, N).

La idea de muchos defensores es la de que cada alumno pueda escojer un tema/asunto de alguna área de su interés, hacer una investigación al respecto, proponer pregunta y, bajo la orientación del profesor, elaborar un modelo matemático. En estos términos, el alumno pasa a ser corresponsable por su aprendizaje y el profesor, un orientador. El aprendizaje se vuelve más rico, considerando que el alumno no sólo aprende matemática inserta en el contexto de outra área del conocimiento, sino que también despierta su sentido crítico y creativo.

En la enseñanza formal, algunos factores como currículo, horario de las clases, número de alumnos por curso, disponibilidad de tiempo para que el profesor efectúe un acompañamiento simultáneo de los trabajos de los alumnos, nos llevaron a efectuar algunas adaptaciones en el proceso de modelización matemática como metodología de enseñanza, estableciendo un método que denominamos Modelación Matemática.

Modelación matemática como método de Enseñanza y de Investigación

La Modelación Matemática es un método de enseñanza y de investigación que se vale de la esencia de la Modelización.

Con su aplicación, se espera propiciar para el alumno:

- Integración de la matemática con otras áreas del conocimiento;
- Interés por la matemática frente a su aplicabilidad;
- Mejoría de la apreensión de los conceptos matemáticos;
- Estímulo a la creatividad en la formulación y resolución de problemas;
- Habilidad en el uso de máquinas (calculadora gráfica y computadoras);
- Capacidad para actuar en grupo;
- Orientación para la realización de la investigación;
- Capacidad para la redacción de esa investigación

La Modelación Matemática tiene su norte en la enseñanza del contenido programático a partir de modelos matemáticos aplicados a las más diversas áreas del conocimiento y, paralelamente, en la orientación de los alumnos para la investigación. Puede ser implementada en cualquier nivel de escolaridad: desde el ciclo primario hasta el superior.

3.1. Modelación como método de enseñanza

La Modelación como método de enseñanza de matemática tiene por objetivo proporcionar al alumno una mejor aprehensión de los conceptos matemáticos, capacitación para leer, interpretar, formular y resolver situaciones-problemas, así como despertar el sentido crítico y creativo.

Para implementarla en la enseñanza, de acuerdo con el contenido programático, el profesor elige un tema/asunto de alguna área del conocimiento que pueda interesar a los alumnos y elabora un modelo matemático, adaptándolo a la enseñanza. O, al contrario, elige un modelo matemático ya listo y lo adapta al desarrollo del contenido programático. Ese modelo servirá de guía. Esto envuelve al profesor en una serie de etapas que consisten en:

1ª) Exposición del tema

Comienza la clase haciendo una breve explicación sobre el tema/asunto de los alumno, instigándolos para que formulen preguntas sobre el tema abordado.

2ª) Delimitación del problema

Selecciona una o más preguntas que le permitan desarrollar el contenido programático. Si fuere posible y/o conveniente, se puede proponer a los alumno que hagan una investigación sobre el asunto, por medio de bibliografía o entrevista a algún especialista en el asunto.

3ª) Formulación del problema

Pasa a plantear el problema, construyendo hipótesis, planteando ecuaciones u organizando los datos de la forma en que el contenido matemático lo requiere para la resolución;

4ª) Desarrollo del contenido programático

En este momento, presenta el contenido programático (concepto, definición, propiedad, etc.) estableciendo una conexión con la pregunta que generó el proceso.

5ª) Presentación de los ejemplos análogos

Enseguida, presenta ejemplos análogos, ampliando el abanico de aplicaciones, evitando, así, que el contenido no se restrinja al tema o problema presentado. Además, el estímulo y la orientación para el uso de la tecnología que es parte de la práctica diaria, tales como calculadoras y/o computadoras, es importante.

6ª) Formulación de un modelo matemático y resolución del problema a partir del modelo

Propone a los alumno que retornen al problema que generó el proceso, resolviéndolo.

7[a]) Interpretación de la solución y validación del modelo

Finalizando esta etapa, es importante que el alumno evalúe el resultado (validación). Esto permite al alumno una mejor comprensión o discernimiento de los resultados obtenidos.

Estas siete etapas no necesitan ser implementadas en una única clase. Se puede planificar para diversas clases dentro de un período lectivo. Por ejemplo, las dos primeras etapas, en una clase, dejando, como tarea de hogar, hacer una investigación sobre el tema abordado; las tres etapas siguientes, en una segunda clase y las dos últimas etapas, en el momento en que el profesor juzgue que los alumnos ya alcanzaron el objetivo o aprendieron el contenido propuesto.

El modelo matemático director puede ser único para todo un período lectivo o para desarrollar cada tópico matemático del programa. Lo importante es que esté en sintonía con los intereses de los alumnos.

3.2. Modelación como método de investigación

El objetivo central de este trabajo es crear condiciones para que los alumnos aprendan a investigar, elaborando modelos matemáticos aplicados a alguna otra área del conocimiento.

Este trabajo es realizado paralelamente al desarrollo del contenido programático. Para facilitar la conducción, sugerimos que los alumnos se agrupen de acuerdo con sus intereses y afinidades u que el período lectivo sea dividido en por lo menos cinco etapas par que sean cumplidas las propuestas y el profesor pueda efectuar las debidas alteraciones en clase. Las etapas son:

1[a]) Elección del tema

Se forman grupos, como máximo de 4 alumnos, y cada grupo elige un tema/asunto de acuerdo con su interés. El grupo de alumnos, con orientación del profesor, debe ser responsable por la elección y dirección de su propio trabajo.

Una vez elegido el tema/asunto, el profesor propone que obtengan datos mediante bibliografía especializada y/o especialistas.

2[a]) Familiarización con el tema a ser modelado

En esta segunda etapa, los alumnos ya deben estar familiarizados con el tema y disponer de muchos datos. Así, el profesor propone que elaboren una serie de preguntas y una síntesis de la investigación para serle entregada. Esta síntesis permite al profesor enterarse del tema y seleccionar, como sugestión, alrededor de 3 preguntas para cada grupo. Preguntas éstas en que la matemática necesaria para resolverlas sea parte del programa.

3[a]) Delimitación del problema y formulación

Delimitado el problema o las preguntas seleccionadas, se pasa a formularlo a partir de la pregunta que requiere matemática más elemental. Cuando el grupo tuviere una buena base sobre el tema con que están trabajando, una entrevista con un Especialista puede contribuir mucho para el trabajo.

4[a]) Elaboración de un modelo matemático, resolución y validación

Una vez formulado el problema, se busca elaborar un modelo que permita no sólo la solución de la cuestión en particular, sino que valga para encontrar otras soluciones o efectuar previsiones.

5[a]) Organización del trabajo escrito y exposición oral

Es de importancia esencial que el trabajo sea divulgado. Así, en esta etapa, los grupos deben presentar el trabajo desarrollado por escrito y oralmente, por medio de un seminario, a los demás alumnos o a quien le pueda interesar.

La Modelación Matemática puede ser utilizada sólo como método de enseñanza o como método de investigación. Usándola sólo como método de enseñanza, sugerimos que el profesor conduzca a los alumnos a hacer investigaciones (por medio de bibliografía especializada y/o mediante una entrevista con un especialista) sobre el tema del(de los) modelo(s) director(es. Como método de investigación solamente, el desarrollo del contenido programático puede ser tratado en la forma tradicional.

Sea apenas en uno de los dos enfoques o en los dos (enseñanza e investigación), tenemos como premisa la promoción del conocimiento matemático y de la habilidad en aplicarlo en otras áreas del conocimiento, o sea, proporcionar elementos para que el alumno desarrolle sus potencialidades, propiciando el pensamiento crítico e independiente.

Partiendo de esa premisa, venimos aplicando la Modelación Matemática poco más de una década con alumnos de nivel primario, medio y superior, directa e indirectamente, por medio de profesores simpatizantes de la propuesta. También hemos desarrollado trabajos con profesores mediante Cursos de Extensión Continuada y disciplinas de Cursos de Especialización en Educación Matemática.

Ejemplo de Modelización Matemática – Tema: Pollos

La siguiente tabla muestra el peso y el consumo de ración de los pollos en función de los días de vida.

Edad (dias)	**(gramos)**	**Consumo de ración (gramos)**
7	145	117
14	365	320
21	705	569
28	1095	731
35	1620	1033

42	2125	1148
49	2615	1324
56	3080	1590

Fuente: EMBRAPA –021. Empresa Brasilera de investigación agropecuaria.

Tabla-01

Cuestiones

- **¿Cuál es la edad ideal para efectuar la daena de los pollos?**
- ¿Cuál es la cantidad total de alimento que los pollos consumen desde que nacen hasta la faena?

Abordando la primera cuestión

Por la simple observación de la tabla nos damos cuenta que el aumento de peso depende de la edad y de la ración de alimento consumida. Para empezar consideremos el tiempo de vida del animal y el peso. Elijamos símbolos apropiados para denominar estas variables. Así, t: dás de vida, p:peso y p(t): peso en función del tiempo.

Con los datos de la tabla podemos realizar una representación gráfica,

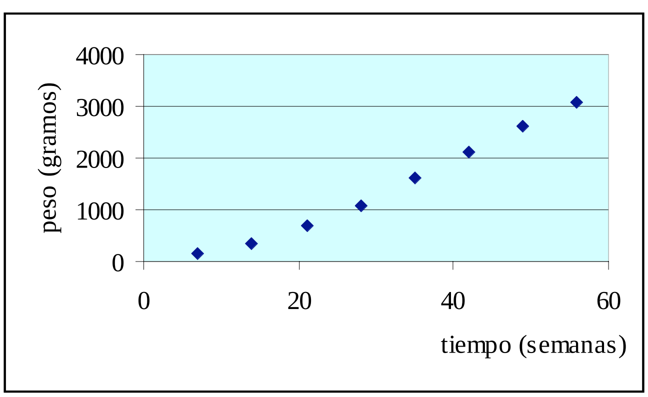


Gráfico-01

Al conocer un conjunto finito y discreto de datos dentro de un período de tiempo, es posible hallar la expresión analítica de una *función que aproxime sus valores a la realidad lo mejor posible.*

Las funciones que se pueden obtener son de diferentes tipos, tales como: polinómicas, exponenciales, logarítmicas, etc.

En este momento nuestro fin es crear una función que **interpole** la nube de datos y eso significa construir una expresión algebraica que revele las tendencias de todo el conjunto y que pase por los puntos que se consideran en la construcción de la expresión analítica.

Pero, ¿qué es una función? ¿cuál es la función que interpole "mejor" los datos? ¿Será lineal? ¿Será cuadrática?, ¿u otro tipo de función?

Desarrollar el contenido matemático: Función Dominio, rango. Función lineal.

Si pensamos en una función lineal, sabemos que dos puntos del plano determinan una recta, con lo cual es necesario escoger dos puntos. Cualquiera de ellos?, NO , pensemos en que la función deberá ajustar lo mejor posible a los datos, por ello elijamos dos puntos de modo que la recta que los contenga sea la más próxima posible a los puntos restantes.

Por ejemplo:

Sean los puntos (14, 365) y (49, 2615). Al pensar en una función lineal inmediatamente pensamos en obtener:

$p = a\,t + b$,

de donde nosotros tenemos que hallar el valor del parámetro a y el valor del parámetro b.

Por cuanto, formulamos un sistema de ecuaciones tal como sigue, reemplazando p y t por las respectivas coordenadas de los puntos, logrando así:

$$\begin{cases} 365 = a\ \ 14 + b \\ 2615 = a\ \ 49 + b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema encontramos que el valor de a es 64,28 y el de b es de –534,92.

La expresión analítica de la función de primer grado es

$$\boxed{p = 64{,}28\ t - 534{,}92} \qquad\qquad 7 \leq t \leq 56$$

donde p representa el peso de los pollos en gramos y t es la edad en semanas.

Veamos gráficamente el ajuste,

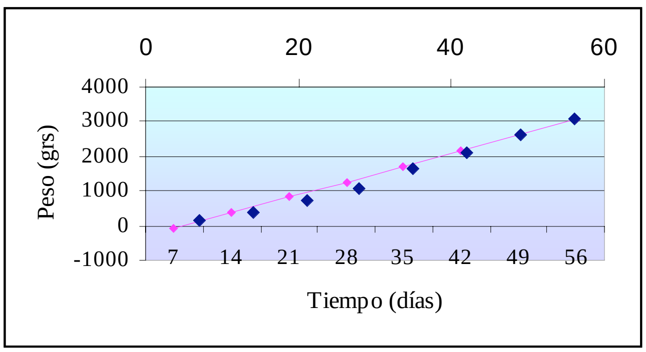


Gráfico-02

Es importante aquí discutir cuestiones relativas al significados de los parámetros, dominio y ritmo de crecimiento,

- El parámetro a (coeficiente angular) representa la tasa media semanal de aumento de peso de los pollos. Es decir, que los pollos aumentan a un ritmo de 64, 28 gramos por semana. La función lineal, implica que el ritmo de aumento de los pollos es constante. Será esto verdadero?

- El dominio de la función es el período entre 7 días y 56 días. Es un dominio restringido y fuera de él los cálculos no tienen sentido, por ejemplo, si pensamos el peso en el momento de su nacimiento, t=0, resulta que el p = -534,92 gramos, lo que en realidad es imposible! El pollito BB tiene, por supuesto, un determinado peso.

Pasaremos ahora a discutir la pregunta planteada anteriormente, ¿Es verdad que el aumento de peso de los pollos es constante?

Para responder calculemos la tasa media de crecimiento semana a semana, obteniendo la tabla siguiente:

Edad (semana)	**Tasa de aumento de peso (gramos)**
1	220
2	340
3	390
4	525
5	505
6	490
7	465

Tabla-02

Observando la tabla, notamos que el aumento de peso NO ES CONSTANTE!!!

Esto muestra que la relación "aumento de peso en relación al tiempo" no es lineal. Si la función lineal no es adecuada, como hemos visto, pensemos en la función de segundo grado.

<u>Desarrollar el contenido matemático</u> relativo a la función de segundo grado y polinomios de grado mayor que dos.

Retornando al modelo, pensemos en: $p(t) = a t^2 + b t + c$, observamos para cumplir con el fin de hallar la expresión analítica necesitamos los valores de tres parámetros, a,b,c. Para ello, consideremos tres puntos: (7, 145), (28, 1095) y (49, 2615).

$$\begin{cases} 49\ a + 7\ b + c = 145 \\ 784\ a + 28\ b + c = 1095 \\ 2401\ a + 49\ b + c = 2615 \end{cases}$$

este sistema también puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 49 & 7 & 1 \\ 784 & 28 & 1 \\ 2401 & 49 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 145 \\ 1095 \\ 2615 \end{pmatrix}$$

Observar que la matriz de coeficientes es de la forma: $V = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{pmatrix}$, el determinante de esta matriz es conocido como determinante de Vandermonde y se puede probar que $|V| = (x_1 - x_0) (x_2 - x_0) (x_2 - x_1)$. Se puede concluir que como los puntos son distintos el sistema tiene solución única.

<u>Desarrollar el contenido matemático</u> de matriz, determinantes y sistemas de ecuaciones

Retornando al modelo y resolviendo el sistema planteado utilizando una herramienta tecnológica, se obtienen los valores de los parámetros,
a = 0,65, b = 22,62 y c = - 45

De este modo, la expresión analítica de la función de segundo grado buscada es:

$$\boxed{p(t) = 0.65\ t^2 + 22.62\ t - 45} \qquad 7 \leq t \leq 56$$

donde p representa el peso de los pollos en gramos y t es la edad en semanas.

Veamos gráficamente el ajuste,

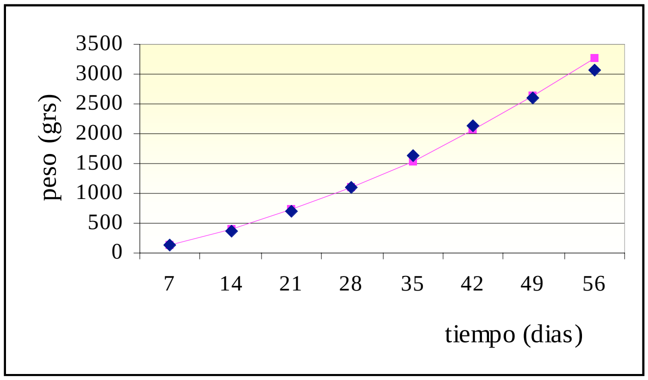


Gráfico-03

Retomando la discusión que dio origen a la búsqueda de una función de segundo grado, observamos que:

- El ritmo de aumento del peso de los pollos, ya no es constante. Verificamos observamos la tabla siguiente:

Edad (dias)	**Tasa de aumento de peso (gramos)**
7	
14	253,89
21	317,59
28	381,29
35	444,99
42	508,69
49	572,39
56	636,09

Tabla-03

No obstante ello, esta función presenta diferencias significativas en el aumento de peso en relación a los verdaderos datos.

Por todo lo expuesto anteriormente, debemos seguir en la búsqueda de funciones que presenten un comportamiento más próximo a la realidad de los pollos.

Y así podemos pensar en una función polinomial de cuarto grado:

$$p(t) = a\,t^4 + b\,t^3 + c\,t^2 + d\,t + e$$

y para determinar el valor de cada parámetro consideremos cinco puntos. Así, elegimos: (7,145), (14,365), (28,1095), (49,2615) y (56,3080), formulando el sistema de ecuaciones lineales:

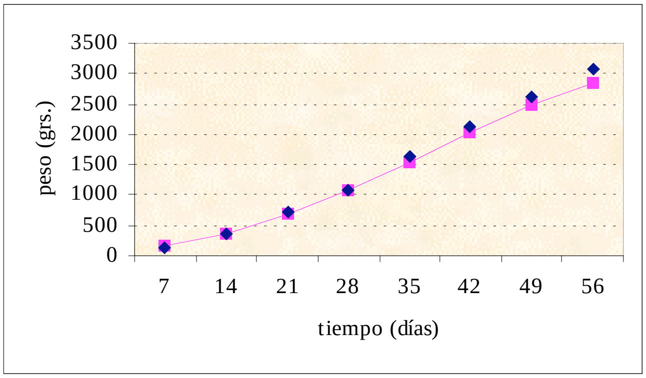
$$\begin{cases} a\,7^4 + b\,7^3 + c\,7^2 + d\,7 + e = 145 \\ a\,14^4 + b\,14^3 + c\,14^2 + d\,14 + e = 365 \\ a\,28^4 + b\,28^3 + c\,28^2 + d\,28 + e = 1095 \\ a\,49^4 + b\,49^3 + c\,49^2 + d\,49 + e = 2615 \\ a\,56^4 + b\,56^3 + c\,56^2 + d\,56 + e = 3080 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\;2401 + b\,343 + c\,49 + d\,7 + e = 145 \\ a\,38416 + b\,2744 + c\,196 + d\,14 + e = 365 \\ a\,614656 + b\,21952 + c\,784 + d\,28 + e = 1095 \\ a\,5764801 + b\,117649 + c\,2401 + d\,49 + e = 2615 \\ a\,9834496 + b\,175616 + c\,3136 + d\,56 + e = 3080 \end{cases}$$

Resolvemos el mismo y encontramos el valor de cada parámetro:

a = - 0, 0002 b = 0,0071 c = 0,9605 d = 9,3181 e= 33,5784

De modo que la función es: $\boxed{p(t) = -0{,}0002\,t^4 + 0{,}0071\,t^3 + 0{,}9605\,t^2 + 9{,}3181\,t + 33{,}5784}$



cuya representación gráfica es:

Gráfico-04

Y la tabla que muestra la tasa de crecimiento es,

Edad (dias)	**Tasa de aumento de peso (gramos)**
7	
14	216,2643
21	315,6069
28	400,7493
35	460,1667
42	482,3343
49	455,7273
56	368,8209

Tabla-04

La función polinomial obtenida está bien próxima a los datos. Y observamos que el aumento de peso depende de la edad. Sin embargo en los primeros días de vida el crecimiento es lento, es decir, la interpolación llega a representar una pérdida de peso, lo que en realidad no ocurre.

Al analizar el ritmo de cambio de peso de los pollos, pensamos siempre en la diferencia:

DP = p(t) – p(t-1) y la tabla-04nos muestra esos valores.

El máximo aumento logrado es de 482,3343 g. que ocurre a los 42 días de vida a partir de allí, si bien el pollo aumenta de peso, la tasa de aumento decae. Lo cual nos permite decir que los pollos deben faenarse después de los 42 días de vida.

Pensemos además que la ración de alimento que le corresponde a este animal debería ya ser aprovechada por outro.

Para encontrar las expresiones analíticas de las funciones analizadas realizado interpolación, es decir, las curvas siempre pasan por los puntos. Los datos podrían ser ajustados utilizando análisis de regresión. Este análisis nos permitirá obtener una función polinomial de cuarto grado que se ajuste a los puntos dados (representa mejor la tendencia de todo el grupo de datos), de modo que las diferencias entre los valores estimados y los valores reales sean los menores posibles. Técnicamente este procedimiento se denomina método de mínimos cuadrados.

No se exige aquí conocimiento de Estadística y Probabilidades, ya que los modelos que serán ajustados son predefinidos.

Desarrollar análisis de regresión: método de mínimos cuadrados.

Considerando la tabla-01que representa la relación peso en función del tiempo (días de vida), podemos determinar:

- La ecuación de regresión lineal que rige el modelo.
- Las ecuaciones de regresión lineal, quadrática, cúbica, de cuarto grado, logarítmica, exponencial y de potencia.

♣ Análisis lineal.

Armando el sistema:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{8} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{8} x_i = \sum_{i=1}^{8} x_i \; y_i \\ a\sum_{i=1}^{8} x_i + nb = \sum_{i=1}^{8} y_i \end{cases}$$

Así,

$$\begin{cases} a\,9996 + b\,252 = 498155 \\ a\,252 + 8b = 11750 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales:

Obteniendo: A= 62,21 y b = - 490, 89

Así:

Gráficamente:

$$\boxed{y = 62{,}21\,x \; - 490{,}89}$$

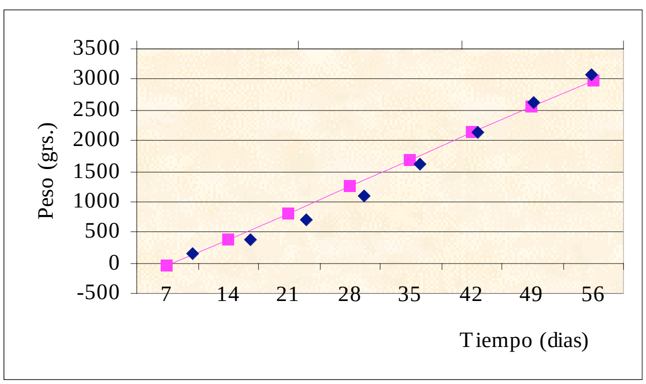


Gráfico-06

La tabla siguiente muestra el error absoluto y relativo:

Tiempo (ias de vida)	Peso (g)	Valor función	Error absoluto	Error Relativo
7	145	-55,42	200,42	138,2206897
14	365	380,05	15,05	4,123287671
21	705	815,52	110,52	15,67659574
28	1095	1250,99	155,99	14,2456621
35	1620	1686,46	66,46	4,102469136
42	2125	2121,93	3,07	0,144470588
49	2615	2557,4	57,6	2,202676864
56	3080	2992,87	87,13	2,828896104

Tabla-06

Observamos que el error no se aproxima a cero en todas las semanas, queda claro que la ecuación lineal no satisface el modelo.

De ahora en adelante resolveremos los sistemas utilizando la calculadora.

♣ Regresión lineal (idem anterior):

$$Y = a\,x + b$$

a= 62,21 ; b = - 490,89; r = 0,99425

$$Y = 62{,}21\,x - 490{,}89$$

♣ Regresión cuadrática:

$$Y = a\,x^2 + bx + c$$

A = 0,423955 ; b = 35,5017 ; c = -179,2857

R^2= = 0,9975

$$Y = 0{,}423955\,x^2 + 35{,}5017\,x - 179{,}2857$$

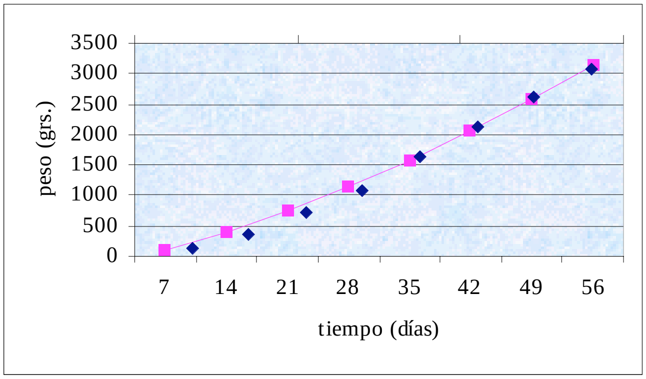


Gráfico-07

4. Hechos relevantes de la Modelación Matemática

La Modelación Matemática es un proceso que viene siendo implementado hace más de una década, en fase experimental. Como cada propuesta en fase de implementación, tiene ventajas buenas y legítimas, sin embargo, tiene también algunas dificultades pasibles de ser sanadas.

4.1. Las principales ventajas

Dentro de las ventajas, los principales hechos se encuentran:

1. Con relación al modelo director que:
   - Propicia para el alumno una mejor comprensión de los contenidos desarrollados y mejora el grado de interés del alumno por la matemática, debido a la aproximación con el área afín y la aplicación;
   - Permite una mayor seguridad al profesor en la conducción de la clase, facilitando, sobremanera, "prevé"/determinar un tiempo para enseñar matemática, para presentar otros ejemplos y para retornar al modelo director, resolviéndolo y evaluándolo.

2. En relación al trabajo de modelización que:
   - Lleva al alumno a: actuar/hacer y no sólo a recibir sin comprender el significado de lo que estaba estudiando; investigar, que es una actividad poco común a pesar de ser parte del currículo; originar conocimiento, creatividad y sentido crítico, principalmente en la formulación y validación del modelo; interactuar y enterarse de los trabajos de los demás grupos, en el seminario y, entre otras cosas, aplicar las normas de la metodología científica al elaborar una exposición escrita del trabajo;
   - Permite al profesor: estar más atento a las dificultades del alumno, tomar conocimiento de los trabajos en forma gradual, en especial, en el momento

en que orienta a los alumnos y a modificar sus criterios e instrumentos de evaluación.

4.2. Las principales dificultades

La dificultad principal está centrada en la formación de los profesores y en la falta de vivencia del alumno en un trabajo de esta naturaleza. En la formación de profesores de Matemática, por ejemplo, raramente se da una orientación de modelización ni la utilización de este procedimiento en la enseñanza formal. Eso viene ocurriendo más a menudo en esta última década, en Cursos de Extensión o disciplinas de Postgrado en Educación Matemática. Para alumnos que ya vivenciaron una enseñanza en los moldes tradicionales, la resistencia a la Modelación es significativa, ya que este método requiere más empeño en los estudios, en la investigación y en la interpretación del contexto.

4.2.1. Para el profesor

- Interpretación del contexto

En la enseñanza tradicional, particularmente la de Matemática, pocas veces son presentadas a los alumnos situaciones o situaciones-problemas que requieren, luego de lectura e interpretación, una formulación y explicación de ese contexto. Sin esta vivencia, sea como alumno o como profesional, esa capacidad se va perdiendo. Un intento de recatarla no es una tarea fácil.

- Perfeccionamiento

Como la Modelación y la Modelización vienen siendo defendidas como método de enseñanza desde poco más de una década y, considerando las dimensiones geográficas de nuestro país, los cursos de perfeccionamiento y especialización ya realizados en esa área todavía no han sido suficientes para alcanzar a todos nuestros profesores. Por otro lado, tales cursos tienen entre 20 y 40 horas, o poco más, lo que no es suficiente para una plena formación sobre el método. Los cursos apenas señalan la cuestión, provocando una cierta motivación por parte de los profesores.

- Bibliografía

En portugués hay pocos trabajos publicados sobre Modelización y Modelación en la Enseñanza o aun trabajos académicos disponibles a los cuales el profesor pueda tener un fácil acceso. Sin embargo, en casi todas las áreas hay modelos matemáticos aplicados (Física, Química, Biología, Economía, etc.) pero que demandan del profesor una cierta base sobre el área en cuestión.

- Orientación

Un curso de perfeccionamiento o un texto sobre el asunto no propician la seguridad suficiente al profesor para poner en práctica el método de la Modelación en un primer momento. Esa seguridad, como también la habilidad, sólo es adquirida con el tiempo. La orientación de un especialista en el asunto, dirimiendo dificultades y auxiliando en la planificación y conducción de las actividades, propiciaría, ciertamente, más seguridad al profesor.

- Planificación

¡La planificación es vital! Es preciso, con anterioridad, establecer las estrategias que deberán ser utilizadas para dirimir los problemas referentes al aprendizaje, a la estructura y a la forma que se va a adoptar, a las prácticas que mejor se aplicarán y a la evaluación del proceso y de los resultados. La ausencia de una planificación sobre cuándo enseñar uno u otro tópico del programa y presentar ejemplos análogos, integrando los trabajos de los alumnos, puede llevar a una desorientación por parte del profesor y, consecuentemente, de los alumnos.

- Disponibilidad para aprender y para orientar

Para que el profesor pueda orientar a lo alumno en la realización de sus trabajos, es necesario tomar conciencia de los temas/asuntos por ellos escogidos antes de llegar a la 3ª etapa del proceso de Modelación como método de investigación, es decir: la delimitación del problema y su planteo. Cuanto mayor es el número de grupos de alumnos, mayor es el número de temas y, por consiguiente, mayor el tiempo que el profesor tendrá que disponer para estudiar. Ese estudio es vital para la orientación. Y requiere disponer de tiempo.

- Orientación

El proceso exige una buena orientación por parte del profesor. La cuestión es saber cómo lidiar con el programa y con los trabajos de modelización de los alumnos. En este caso, la planificación es esencial. Planificar, inclusive el tiempo que puede disponer con cada grupo en el aula. Por ejemplo, para cursos con más de 30 alumnos, que implica la formación de más de 5 grupos, el tiempo disponible en el aula se muestra insuficiente para una adecuada orientación. Además, efectuar orientación fuera de los límites del aula puede comprometer otra actividad, sea del profesor o del propio alumno.

- Apoyo de la comunidad

El compromiso con la Educación es de todos aquellos que están directa o indirectamente envueltos. Así, comprometer la comunidad escolar/institucional o aun colocándola a la par del proceso puede contribuir. Sin este apoyo, el profesor puede desanimarse al aparecer resistencias por parte de alumnos o de padres.

- Evaluación

El proceso de enseñanza/aprendizaje, para los alumnos, contempla orientación adecuada, formalización y organización de los contenidos, estímulo a la creatividad. En este sentido, los criterios e instrumentos de evaluación deben ser reformulados. La prueba escrita y la verificación de sí el alumno sabe alijar una técnica de resolución o no lo sabe, no pueden ser más el único procedimiento. La Modelación requiere una evaluación diagnóstica, procesal y de resultados. El objetivo de la evaluación es saber qué y cuánto conoce el alumno y qué es lo que todavía necesita conocer. Eso requiere otra perspectiva del proceso, lo que, muchas veces, los cursos de formación inicial y/o continuada no contemplan.

4.2.2. Para el alumno

- Interpretación de un contexto

Como ya fue dicho anteriormente, la enseñanza tradicional no capacita al alumno para hacer una lectura del contexto; lectura en un sentido amplio de la palabra. Raramente son desarrolladas habilidades para realizar la lectura de una música, de una obra de arte, de una poesía, de un contexto histórico, de una situación política o de un resultado estadístico, entro otras muchas cosas. Esa es una de las mayores fallas de la educación actual. En estos términos, cuando el alumno, en particular, aquél que ya tiene una vivencia escolar, es colocado delante de un texto o de un contexto, presenta serias dificultades en leer, entender, interpretar, es decir, en hacer una lectura.

- Disponibilidad para investigar

Los temas exigen investigar, para lo cual, muchas veces, la escuela no dispone de recursos. En este caso, la investigación realizada fuera de los límites escolares puede no ser posible, dependiendo de la edad de los alumnos y de las disponibilidades fuera del horario escolar. Además, los alumnos que trabajan tienen dificultades para realizar una investigación así como para obtener una orientación fuera del horario de la clase. Vale destacar que cuanto mayor es el tiempo del que el alumno dispone para el trabajo, en correspondencia con una orientación adecuada, mejor será la calidad del trabajo y del ejercicio de la creatividad.

- Elección del tema/asunto

La elección del tema no es una tarea fácil. La idea de que cada alumno escoja un asunto de interés no siempre proporciona los resultados esperados. Si los datos sobre el tema elegido fueran tan simples que no acrecientan ningún conocimiento matemático o, también, si no fueran fáciles de obtener, puede generar una pérdida de motivación y desinterés por el trabajo. En este caso, la orientación del profesor en la etapa inicial (elección del tema) es esencial para evitar que eso ocurra en mitad del proceso.

- Trabajo en grupo

Un tema elegido por el grupo no asegura que todos, efectivamente, están interesados. Además, el tema puede exigir un conocimiento matemático que no consta en el programa. Eso va a requerir un mayor empeño de cada uno para aprender y realizar la propuesta. La ausencia de empeño o de compromiso de algunos alumnos, rompe una propuesta importante que es la capacidad de realizar un trabajo en grupo, quedando en las manos de uno o dos llevar a cabo un intento, desviando el sentido de la cooperación y de la socialización en favor del aprendizaje.

5. Consideraciones finales

Entendemos que el objetivo de la enseñanza, en los diferentes niveles, deba ser el de propiciar en el alumno la adquisición de conocimientos y el desarrollo de actitudes y habilidades que le favorezcan una plena interacción con la sociedad.

Es con ese objetivo que venimos defendiendo la Modelación Matemática como método de enseñanza y de investigación. La Modelación, sin embargo, no es una panacea para superar todos los problemas de la práctica escolar relativos a la enseñanza de la Matemática. Las investigaciones señalan que aquella puede representar un avance en la enseñanza de la Matemática en el aula, porque ésta deja de ser una mera transmisión de técnicas de resolución (del tipo: siga le modelo) y pasa a ser presentada como herramienta o estructura de otra área del conocimiento. Lo que exige mayor empeño en los estudios, en la investigación y en la interpretación del contexto, tanto para el profesor como para los alumnos. En otras palabras: ¡Mucho más trabajo!

Como investigadores, si esperamos implementar una enseñanza eficaz en todos los niveles escolares, es imperativo un perfeccionamiento continuo, en especial de los profesores que actúan en los cursos de formación. Ya no nos movemos en un terreno por explorar. Si la educación básica es precaria, es porque también son precarios los cursos de formación de profesores.

Investigaciones realizadas, a pesar de las dificultades, han demostrado que la adopción de modelos matemáticos en la enseñanza, sea en la forma de presentación, sea en el proceso de creación, adecuadamente dimensionados a la realidad de las comunidades escolares, es un medio que propicia un mejor desempeño del alumno, convirtiéndolo en uno de los principales agentes de los cambios. Considerando eso, el desafío para nosotros, educadores, es grande.

Comienza por el reconocimiento de las cuestiones que emergen de nuestra precaria formación y por el ataque de esa situación para provocar una mudanza. "No hay misterios en los elementos básicos envueltos en el proceso para alcanzar esa condición; todas las tecnologías necesarias, las herramientas y los elementos de cambio existen. El obstáculo real es decidirnos a tener un compromiso con el nuevo camino. Ese camino precisa partir de cada uno de nosotros. Y de todos nosotros conjuntamente" (Brown, Lester R.).

6. Referencias bibliográficas

BIEMBENGUT, Maria Salett. *Modelagem Matemática & Implicações no Ensino-Aprendizagem de Matemática*. Editora da FURB: Blumenau, 1999.

BIEMBENGUT, Maria Salett e HEIN, Nelson. *Modelagem Matemática no Ensino*. Editora Contexto: São Paulo, 2000.

BROWN, Lester R., (org.) *World Watch Institute,* tradução de Newton R. Eichemberg e Marco A. F. Bueno. São Paulo, 1991.