V FESTIVAL INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA
De costa a costa
Matemática como lenguaje para interpretar nuestro entorno
29 al 31 de marzo, 2006

SIMETRÍA AXIAL

Teodora Tsijli Angelaki[1]

Resumen Se trata de ver el concepto de simetría axial desde el punto de vista etimológico de la palabra, el concepto geométrico, el reconocimiento de simetría en figuras geométricas, la demostración de simetría respecto de una recta en geometría analítica tanto en un sistema cartesiano como en un sistema polar, así como la utilización de la simetría en distintos ámbitos de la ciencia, el arte y la vida cotidiana.

SIMETRIA Es la unión de dos palabras ΣΥΝ que significa CON y ΜΕΤΡΟ que significa MEDIDA

AXIAL proviene de la palabra ΑΞΩΝ que significa EJE.

Simetría axial es una simetría relacionada con un eje.

Idea intuitiva de la simetría

La imagen en el espejo plano mantiene la figura idéntica y además mantiene la misma distancia entre objeto-espejo e imagen-espejo.

Uso de la palabra simetría en lo cotidiano

La palabra simetría en lo cotidiano, se utiliza en el sentido del espejo pero también, se usa para indicar cierta proporción de las partes de un todo entre sí y con el todo mismo).

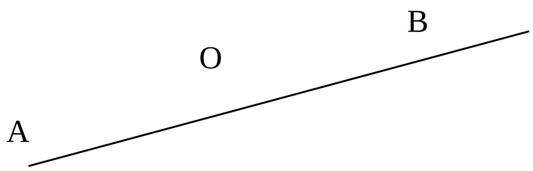
[1] Profesora Catedrática de la Universidad de Costa Rica y de la Universidad Nacional.
Correo electrónico: ttsijli@yahoo.com

SIMETRIA EN LA GEOMETRIA EUCLIDEA

SIMETRIA EN EL PLANO

I) SIMETRÍA RESPECTO DE UN PUNTO

a) SIMETRIA DE UN PUNTO
RESPECTO DE UN PUNTO FIJO



b) SIMETRIA DE UN SEGMENTO
RESPECTO DE UN PUNTO FIJO

c) SIMETRIA DE UNA CURVA
RESPECTO DE UN PUNTO FIJO

II) SIMETRIA RESPECTO DE UNA RECTA

a) SIMETRIA DE UN PUNTO
RESPECTO DE UNA RECTA FIJA

b) SIMETRIA DE UN SEGMENTO
RESPECTO DE UNA RECTA FIJA

c) SIMETRIA DE UNA CURVA
RESPECTO DE UNA RECTA FIJA

SIMETRIA EN EL ESPACIO

I) SIMETRÍA RESPECTO DE UN PUNTO

II) SIMETRIA RESPECTO DE UNA RECTA

III) SIMETRÍA RESPECTO DE UN PLANO

De las simetrías mencionadas anteriormente la simetría axial es la simetría respecto de una recta, sea en el plano o en el espacio.

SIMETRIA DE UN PUNTO

Un punto A es simétrico a un punto B respecto de un punto O si A-O-B y AO=OB.

Un punto A es simétrico a un punto B respecto de una recta l si AB e perpendicular a l y la recta l biseca al segmento AB.

Un punto A es simétrico a un punto B respecto de un plano π si la recta AB es perpendicular al plano π y el plano π biseca el segmento AB

SIMETRÍA DE UN SEGMENTO

Un segmento AB es simétrico al segmento A´B´ respecto de un punto O si los puntos de AB son los puntos simétricos respecto de O de los puntos de A´B´.

Un segmento AB es simétrico al segmento A´B´ respecto de una recta l si los puntos de AB son los puntos simétricos respecto de l de los puntos de A´B´.

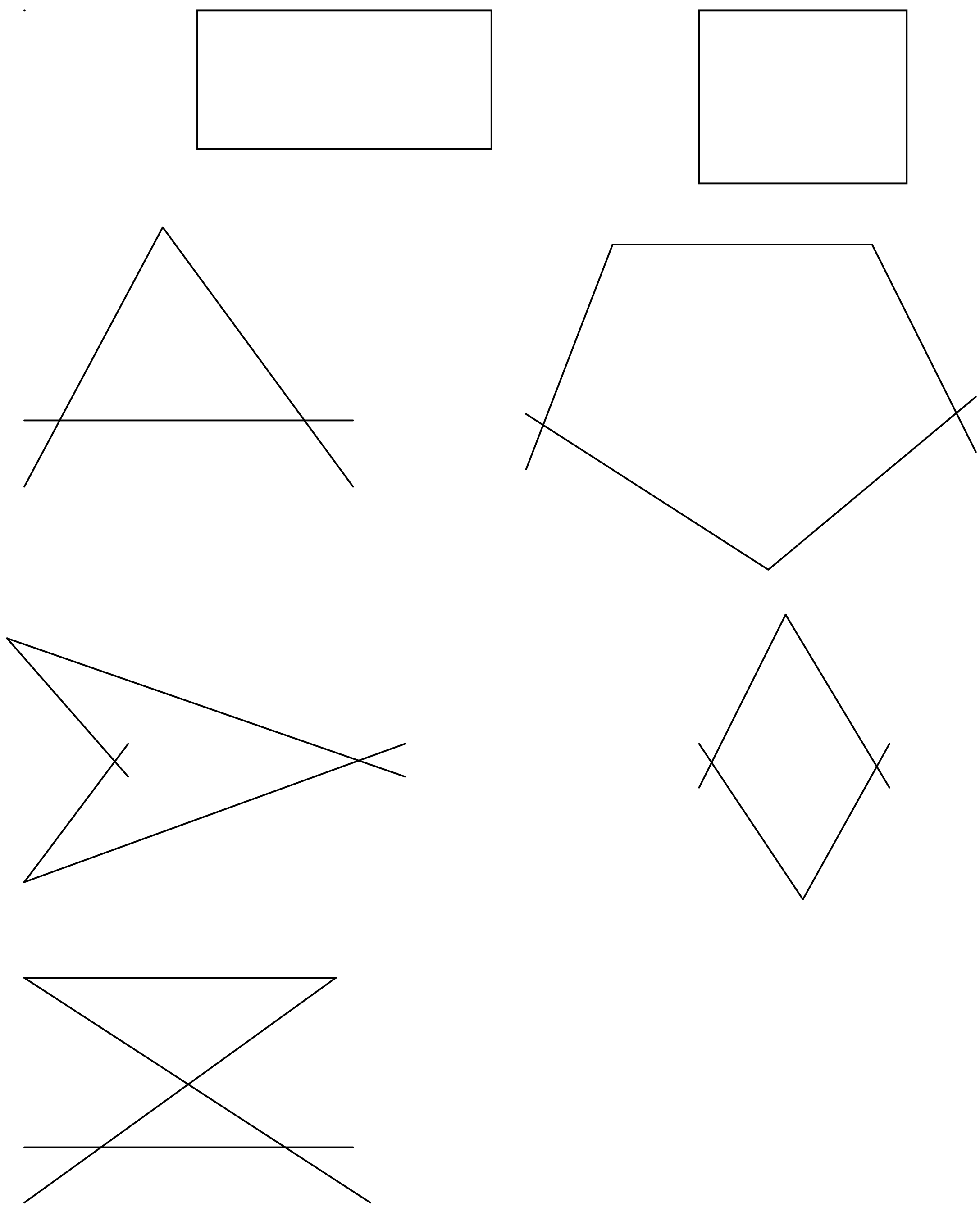
Un segmento AB es simétrico al segmento A´B´ respecto de un plano π si los puntos de AB son los puntos simétricos respecto de π de los puntos de A´B´.

Análogamente se define la simetría de una curva.

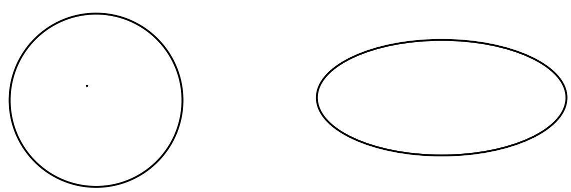
La **simetría axial** se refiere a la simetría respecto de una recta y esa recta se llama **eje de simetría.**

En figuras poligonales es relativamente fácil detectar los ejes de simetría si los hay. Una figura puede tener más de un eje de simetría.

Figuras poligonales



El círculo y la elipse



SIMETRIA EN LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Si salimos de la geometría Euclidiana y pasamos a la geometría analítica podemos hablar de la simetría en R, en R^2 y en R^3.

En R a y b son simétricos respecto a c si $|a-c| = |b-c|$

En, R^2 ¿cómo detectar si una curva tiene eje de simetría y cómo encontrarlo?

a) Una curva y = f(x) es simétrica es simétrica respecto del eje Y si f(-x) = f(x) para todo x en el dominio de f.
b) Si y = f(x) es tal que existe a tal que para t = x- a y se puede expresar a y como y = f(t) y f(-t) = f(t) entonces y= f(x) es simétrica respecto de la recta x = a.

Podemos ver curvas que tienen eje de simetría una recta paralela al eje X así.

c) Una curva x = f(y) es simétrica es simétrica respecto del eje X si f(-y) = f(y) para todo y en el dominio de f.
d) Si x = f(y) es tal que existe a tal que para t = y- a y se puede expresar a y como x = f(t) y f(-t) = f(t) entonces x es simétrica respecto de la recta y = a.

Ejemplos muy conocidos

1) $y = x^2$ es tal $(-x)^2 = x^2$ por lo tanto esta es simétrica respecto del eje Y
2) Sea y = x^2 + 2x +1 ponemos x = t-1 y tenemos.

y = $(t-1)^2$ – 2(t-1) + 1 = t^2 – 2t + 1 +2t –2 +1 = t^2.

Por el punto anterior sabemos que esta es simétrica respecto del eje t, por lo tanto,

y = x^2 + 2x +1 tiene eje de simetría y es la recta x = -1.

3) x= y^2 es tal $(-y)^2 = y^2$ por lo tanto esta es simétrica respecto del eje X

4) Sea x = y^2 + 2y +1 ponemos y = t-1 y tenemos.
5) x = $(t-1)^2$ – 2(t-1) + 1 = t^2 – 2t + 1 +2t –2 +1 = t^2. Por el punto anterior sabemos que esta es simétrica por lo tanto x = y^2 + 2y +1 tiene eje de simetría y es y = -1.

La parábola 2) es la misma 1) obtenida por traslación en x=1

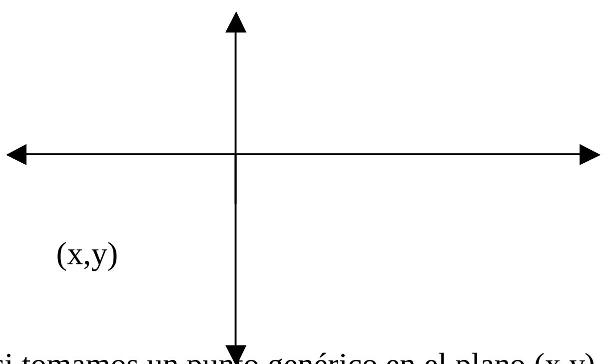
Las parábolas de 3) y 4) son las mismas 1) y 2) respectivamente obtenidas por rotación de 90º.

Si se trata de una función Y = f(x) o bien, de una función x =g(y) se procede como en los ejemplos anteriores.

SIMETRÍA DE CURVAS EN GENERAL

Cuando hablamos de curvas no necesariamente hablamos de funciones. Hemos presentado dos ejemplos muy simples de una parábola orientada hacia el eje Y, o sea, una función en x, y luego la misma parábola orientada hacia el eje X, es decir, una función con variable independiente y.

En el caso más general una curva en el plano cartesiano viene dada por una ecuación de la forma **f(x,y)=0**.
Para determinar si una curva (no necesariamente y función de x o x función de y) es simétrica respecto de uno de los ejes procedemos de la siguiente manera.



Note que si tomamos un punto genérico en el plano (x,y), su punto simétrico respecto del eje X tiene coordenadas (x,-y) y su punto simétrico respecto del eje Y tiene como coordenadas (-x,y).

Entonces, si queremos determinar si una curva dada es simétrica respecto de eje X, sustituimos en la ecuación dada el punto (x,-y) y efectuamos las posibles operaciones algebraicas. Si se logra reproducir la ecuación dada quiere decir que el punto (x,-y) satisface la ecuación de la curva, o sea, pertenece a la curva. Como no usamos un punto específico concluimos que para cada punto (x,y) que pertenece a la curva, su simétrico (x,-y) también pertenece a la curva por lo tanto el eje X es eje de simetría de la curva.

La curva dada por $x^4 + y^2 = 4$ se puede que es simétrica respecto del eje X.

En otros casos, si encontramos α tal que para $t=x-\alpha$ podemos escribir $f(t,y)=0$ y además, esta curva es simétrica respecto de t, entonces la curva original tiene un eje de simetría cuya ecuación es la recta $x = \alpha$.

Análogamente se puede analizar si la curva es simétrica respecto del eje Y o respecto de una recta paralela al eje Y.

De hecho, la curva dada por $x^4 + y^2 = 4$ es simétrica respecto del eje Y porque, al sustituir el punto (x,y) por su simétrico (-x,y) respecto el eje Y la ecuación se reproduce. Es decir, la curva es simétrica respecto Y. En la misma forma, al sustituir el punto (x,y) por su simétrico (x,-y) respecto el eje X la ecuación se reproduce. Es decir, la curva es simétrica respecto X.

O sea esta curva tiene dos ejes de simetría, el eje X y el eje Y.

Observe que no sustituimos el punto (-x,-y) porque este es simétrico de (x,y) respecto del origen con lo cual estaríamos determinando la simetría respecto del centro de coordenadas.

SISTEMA POLAR

Hay otros casos, en los que se tienen curvas que en el sistema cartesiano no son funciones pero se pueden expresar como funciones en el sistema polar y analizar sus posibles simetrías respecto de los ejes del sistema de coordenadas cartesianas utilizando su ecuación polar.

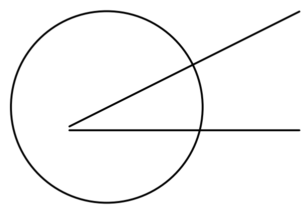
¿Cómo se hace?

Recordemos un poco lo relativo a sistema de coordenadas y en particular el sistema de coordenadas polares.

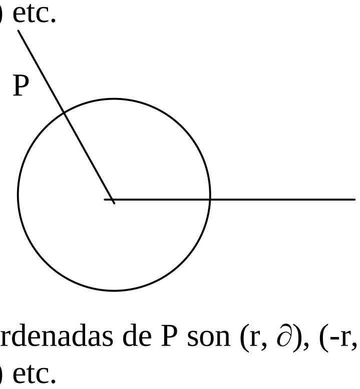
Un sistema de coordenadas lo forman dos familias de curvas ortogonales. O sea, dos familias de curvas que al intersecarse, una curva de una familia con otra de la segunda familia, se intersecan formando ángulo recto, es decir, las tangentes a las curvas en su punto de intersección son perpendiculares entre sí. El sistema de coordenadas cartesianas ortogonales usual, está formado por una familia de rectas horizontales y una familia de rectas verticales. Un punto en el plano se da como la intersección de una recta vertical con una horizontal. En este sistema, la ecuación de una curva de las familias de curvas coordenadas es constante, $y = k$, $x= m$ respectivamente.

En el sistema polar, una de las familias de las curvas coordenadas está formado por círculos concéntricos y la otra familia está formada por semirrectas con origen en el centro de los círculos concéntricos llamado polo. La semirrecta horizontal se llama eje polar.

Obsérvese que, los puntos que están en una curva de la primera familia tienen la característica de que tienen una distancia desde el polo fija, constante. ¿Cómo obtenemos un círculo de estos? Conociendo su radio. Si el radio de este círculo es k, la ecuación del círculo será r = k. Los puntos de una curva de la segunda familia forman con el eje polar un ángulo constante y si conocemos este ángulo la semirrecta está determinada. Si este ángulo es ∂o, la ecuación de esta semirrecta será $\partial = \partial o$



Un punto cualquiera en el plano está dado por la intersección de un círculo con una semirecta y sus coordenadas polares son (r, ∂)
Se admiten ángulos negativos, igual que se hace en la trigonometría, y también, se admiten segmentos negativos sobre la prolongación de la semirecta partiendo desde el polo.
Esta situación marca una diferencia sustancial entre este sistema y el sistema cartesiano. En el sistema cartesiano, una vez determinado el sistema (fijar los ejes y la unidad de medida en cada uno de ellos, se establece una relación biunívoca entre el plano y R^2. A cada par ordenado de R^2 le corresponde un único punto del plano, y, a cada punto del plano le corresponde un único par ordenado en R^2
En el sistema polar, a cada par ordenado (r, ∂) le corresponde un único punto en el plano, pero, a cada punto en el plano le corresponden varios pares ordenados. En la figura anterior, al punto P le corresponden los pares ordenados (r, ∂), $(-r, \pi+\partial)$, $(-r,-\pi-\partial)$ etc.



Las coordenadas de P son (r, ∂), $(-r, \pi+\partial)$, $(-r,-\pi-\partial)$ etc.
Al determinar simetrías en curvas dadas por medio de ecuaciones referidas al sistema polar, se trabaja con el sistema polar sobrepuesto al sistema cartesiano de manera que

el origen de coordenadas coincide para ambos sistemas y el eje polar coincide con el semieje positivo de las abscisas. En esta forma, dada una curva en el sistema cartesiano se puede encontrar su ecuación en el sistema polar y viceversa, dada la ecuación en el sistema polar, se puede encontrar su ecuación en el cartesiano con las fórmulas,

x = rsen∂, y = rcos∂, $r^2 = x^2 + y^2$, tan∂ = $\frac{y}{x}$

Para determinar si una curva dada en coordenadas polares es simétrica respecto el eje X (eje Y respectivamente), recuerde que se trabaja con ambos sistemas sobrepuestos, se sustituye en la ecuación de la curva el punto genérico (r,∂), por las coordenadas del punto simétrico respecto del eje X (eje Y respectivamente).

Dado el punto (r, ∂), las coordenadas de su punto simétrico respecto del eje X son (r, -∂), (-r, π-∂), (-r, -π-∂), y,
las coordenadas de su punto simétrico respecto del eje Y son
(-r, -∂), (r, π-∂),(r, -π-∂).

Si alguna de las representaciones de este punto simétrico reproduce la ecuación original, la curva es simétrica respecto del eje en cuestión.

Si la primera sustitución no da simetría no se puede concluir falta de simetría, hay que hacer una segunda sustitución con otra de las representaciones posibles del punto simétrico de (r, ∂).

Se puede verificar que las curvas dadas por

$r = \alpha \cos 3\vartheta$, y, $r = \alpha(1 - \cos\vartheta)$,

son simétricas respecto del eje X.

La curva dada por $r = \alpha(1 + \operatorname{sen}\vartheta)$, es simétrica respecto el eje Y.

Las curvas $r^2 = \alpha \cos 2\vartheta$, y, $r = \alpha \cos 2\vartheta$ tienen como ejes de simetría tanto al eje X como el eje Y.

Lo visto hasta el momento referente al concepto matemático de la simetría axial y respecto del uso cotidiano de la simetría espejo-objeto.

La Simetría axial

¿Para qué sirve?.

¿Cómo se utiliza?

Traslación, Rotación, Reflexión y Simetría por desplazamiento

Un mosaico es una composición con losetas que reproduce un paisaje u otra figura. Cuando las losetas llenan el plano basándose en simetrías, desplazamientos y rotaciones, decimos que tenemos un mosaico geométrico.
Para rellenar un mosaico geométricamente, existen cuatro estrategias.

1) Traslación. Es como si la nueva loseta que añadimos es la misma anterior desplazada a una nueva posición.
2) Rotación. La nueva loseta surge por el giro de una anterior con centro en algún punto determinado y con un ángulo determinado.
3) Reflexión. Cada loseta nueva es la imagen especular de la anterior, con un eje de simetría dado.
4) Simetría con deslizamiento. Se trata de una reflexión seguida de una traslación en la dirección el eje de reflexión. Estas cuatro estrategias son movimientos en el plano isométricos.

Los dos primeros conservan la orientación (movimientos directos) y los otros la invierten (movimientos inversos).
Estas transformaciones dan lugar a estructuras algebraicas que se denominan Grupos de Simetría.
Fedorof, en 18 91 demostró que hay exactamente 17 maneras diferentes de hacer patrones de mosaicos por combinación de movimientos en el plano y llega a esa conclusión estudiando las formas de cristalizar los cristales naturales.
En España, en el monumento Alhambra construido por los árabes están materializadas las 17 formas de enlosetar.

http:/thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0084-02/capitulo4.html

math.humboldt.edu/ spai/alh/

La simetría en la Física

La Física clásica de Galileo y Newton, esto es, la mecánica desarrollada luego por Langrange, Hamilton y otros hasta llegar a la teoría de la relatividad de Einstein descansan en la postulación implícita de simetría en el contexto del espacio-tiempo. Las leyes físicas que formulamos en el contexto de nuestro sistema solar tienen la misma estructura que si hubieran sido formuladas en el ámbito de un planeta correspondiente a una lejana estrella de otra galaxia como por ejemplo Andrómeda.

La isotropía se refiere a que todas las direcciones espaciales son entre sí equivalentes, son simétricas. No existen direcciones del espacio donde las leyes de la física funcionen de manera distinta a como funcionan en las restantes direcciones.
http:/personales.ya.com.casanchi/fis/simetria01

Hay más

Acelerador de Partículas o betatrón: Los fundamentos físicos del betetrón, combinan la ley de Faraday y el movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico y en un campo magnético.
El betatrón se utiliza para estudiar ciertos tipos de reacciones nucleares y como fuente de radiación para el tratamiento del cáncer.
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/induccion/betatron/betatron.htm

La simetría en el juego ciencia

Se dice que un aficionado al ajedrez le dijo a un maestro "Maestro, he hallado un método infalible para no perder una partida, aunque me enfrente a usted". El maestro preguntó cuál era ese método y el aficionado le dijo. " jugar con las negras y hacer exactamente la misma jugada que hacen las blancas"
El maestro le ofreció jugar una partida en esas condiciones y la partida quedó así:

Esa partida es simétrica hasta que se termina la simetría con el mate de las blancas.
http://www.disdelasimetria.com/mm.htm

Las Pirámides Mayas

La estructura de la primera figura presenta una escalinata axial que conduce a la cima y está adornada con grandes mascarones de estuco, se remonta al año 50 de nuestra era y está en Cerros de Belice.

En Uaxactuún, cerca de Tical está la pirámide de la figura 2 descubierta en 1927 que muestra una decoración análoga pero aplicada en las cuatro fachadas.
http://www.almendron.com.cuaderno/arquitectura/mayas/may/_03/may_032/may_032.htm

El teatro de Epidauro

El Santuario a Asklepios en Epidauro, conocido como El teatro de Epidauro, ya admirado por Pausanías por su simetría y belleza. Construido en la primera etapa en el siglo IV a.C. es famoso por su excelente acústica. La segunda etapa significó la ampliación del anfiteatro a la mitad del siglo II a.C.
Desde 1954 se realiza El Festival de Teatro que atrae gran cantidad de turistas.

http:/www.culture.gr/2/21/211/21104n/e211dn02.html

Las pinturas de Escher