LOS GRANDES PROBLEMAS MATEMÁTICOS DEL SIGLO XXI: RETOS Y RECOMPENSAS

Edison De Faria Campos[1]

Resumen
En el siglo XXI hemos heredado muchos problemas matemáticos importantes que no pudieron ser resueltos en el siglo pasado. Para algunos de ellos existen recompensas económicas bastante significativas para las personas que logren solucionarlos, como por ejemplo los siete problemas del milenio que describiremos, con un premio de un millón de dólares para la solución de cada uno de ellos.

Introducción

Sabemos que no existe el premio Nobel en matemática y que su equivalente es la medalla Fields, en honor al proponente de la idea de dar medallas internacionales por destacados descubrimientos matemáticos, el matemático canadiense John Charles Fields (Perero, 1994, páginas 53-58). A partir de 1936, la medalla Fields se otorga cada cuatro años a dos (y hasta un máximo de cuatro a partir de 1966) matemáticos destacados no mayores de cuarenta años (exceptuando el premio especial dado a Andrew Wiles) y es el premio de mayor prestigio en matemática aunque no es el único. Otros reconocimientos famosos son los premios:

- Nevanlinna
- Abel
- Bôcher
- Cole
- Shaw
- Ramanujan
- Carl Friedrich Gauss
- Wolf

Las páginas web de Clay Mathematics Institute, de la AMS y en el MacTutor pueden ser encontradas informaciones sobre estos reconocimientos.

El premio Nevanlinna fue instituido por la Universidad de Helsinki en 1978 como tributo al destacado matemático filandés Rolf Nevanlinna (1895-1980), ex rector de la Universidad de Helsinki y ex presidente de la Unión Matemática Internacional (IMU). Este premio es otorgado cada cuatro años en un Congreso Internacional de Matemáticas, en el mismo evento de entrega de la medalla Fields, para la

[1] Asociación de Matemática Educativa, ASOMED, Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, CIMM. Correo-e: edefaria@cariari.ucr.ac.cr

contribución más destacada en aspectos matemáticos de ciencias de la información, incluyendo:

1. Todos los aspectos matemáticos de ciencias de la computación, incluyendo teoría de la complejidad, lógica de lenguajes de programación, análisis de algoritmos, criptografía, reconocimiento de patrones, computación visual, procesamiento de la información y modelado de la inteligencia.
2. Cálculos científicos y análisis numérico. Aspectos computacionales de optimización y teoría de control. Álgebra computacional.

El premio consiste en una medalla de oro y una cantidad de dinero similar a la otorgada por la medalla Fields.

Medalla Fields

Medalla Nevanlinna

Los ganadores del premio Nevanlinna fueron: Robert Tarjan (1982), Leslie Valiant (1986), A. A. Razborov (1990), Avi Wigderson (1994), Peter Shor (1998), Madhu Sudan (2002).

Los ganadores del Fields fueron:

Año	**Ganadores**
1936	ALFORS, Lars Valentin; DOUGLAS, Jesse
1950	SCHWARTZ, Laurent; SELBERG, Atle
1954	SERRE, Jean-Pierre; KODAIKA, Kunihiko
1958	THOM, René; ROTH, Klaus Friedrich
1962	HORMANDER, Lars; MILNOR, John
1966	ATIYAH, Michael Francis; COHEN, Paul Joseph; GROTHENDIEK, Alexander; SMALE, Stephen
1970	BAKER, Alan; HIRONAKA, Heisuke; NOVIKOL, Serge; THOMSON, John
1974	BOMBIERI, Enrico; MUMFORD, David Bryant
1978	Deligne, Pierre René; MARGULIS, Gregori; FEFFERMAN, Charles; QUILLEN, Daniel

1982	CONNES, Alain; YAU, Shing-Tung; THURSTON, William P.
1986	DONALDSON, Simon K.; FALTINGS, Gerd; FREEDMAN, Michael
1990	JONES, Vaugham; WITTEN, Edward; DRINFELD, Vladimir; MORI, Shigefumi
1994	BOURGAIN, Jean; LIONS, Pierre-Louis; YOCCOZ, Jean-Christophe; ZELMANOV, Efim
1998	BORCHERDS, Richard; GOWERS, Timothy; KONTSEVICH, Maxim; MCMULLEN, Curtis; WILES, Andrew (Premio especial dado por IMU)
2002	LAFFORGUE, Laurent; VOEVODSKY, Vladimir

En agosto del 2006 se llevará a cabo la siguiente premiación Fields.

El premio Abel, en honor al gran matemático noruego Abel Niels, Hendrik (1802-1829) está dotado de 6.000.000 coronas noruegas (unos 875.000 dólares americanos) y fue otorgado por la Academia Noruega de Ciencias y Letras, en su primera edición (2003) a Jean-Pierre Serre (Colegio de Francia, París) por su papel central en la elaboración de teorías modernas en topología, teoría de números y geometría algebraica. Los ganadores del 2004 fueron Sir Michael Francis Atiyah (Universidad de Edimburgo) e Isadore M. Singer (MIT) por el trabajo de ambos en el Teorema del Índice. El premio del 2005 fue otorgado a Peter Lax del Courant Institute of Mathematical Sciencies (Universidad de New York) por sus revolucionarias aportaciones a la teoría y aplicación de las ecuaciones diferenciales.

El premio Shaw es otorgado a personas dedicadas al progreso de la civilización en ámbitos académicos, investigativos o aplicados cuyo trabajo ha resultado en un impacto profundo y positivo para la humanidad. Es un premio internacional administrado por la fundación Shaw Prize con base en Hong Kong, bajo los auspicios de Run Run Shaw, y cada año son otorgados tres premios: para astronomía, ciencias de la vida y medicina, ciencias matemáticas. Cada premio es de US $1 millón.

Sir Run Run Shaw es un exitoso empresario nacido en China en 1907 en Ningbo.

El primer ganador del premio en matemática fue Sing-shen Chern de la Universidad Nankai en Tianjin, China en el 2004 por su trabajo pionero en geometría diferencial global.

El 3 de junio del 2005 la Fundación Shaw Prize anunción que Andrew Wiles de la Universidad de Princenton fue el ganador del premio debido a su demostración del último teorema de Fermat.

El premio Wolf ha sido otorgado desde 1978 por la fundación Wolf, establecida en 1976 por el Dr. Ricardo Wolf (1887-1981), inventor, diplomático y filántropo para promover las ciencias y el arte en beneficio de la humanidad. Anualmente se otorgan seis premios en agricultura, química, matemática, medicina, física. En artes el premio se alterna entre arquitectura, música, pintura y escultura. Cada premio consta de un diploma y US$ 100,000 en efectivo.

La lista de los ganadores en matemática es la siguiente:

Año	**Ganadores**
1978	Izrail M. Gelfand (Moscow State University, Moscow, USSR) y Carl L. Siegel (Georg-August University, Göttingen, W. Germany)
1979	Jean Leray (College de France, Paris, France) y Andre Weil (Institute for Advanced Study, Princeton, USA)
1980	Henri Cartan (Université de Paris, Paris, France) y Andrei N. Kolmogorov (Moscow State University, Moscow, USSR)
1981	Lars V. Ahlfors (Harvard University, Cambridge, USA) y Oscar Zariski (Harvard University, Cambridge, USA)
1982	Hassler Whitney (Institute for Advanced Study, Princeton, USA) y Mark Grigor'evich Krein (Ukrainian S.S.R. Academy of Sciences, Odessa, USSR)
1983-84	Shiing S. Chern (University of California, Berkeley, USA) y Paul Erdos (Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary)
1984-85	Kunihiko Kodaira (The Japan Academy, Tokyo, Japan) y Hans Lewy (University of California, Berkeley, USA)
1986	Samuel Eilenberg (Columbia University, N.Y., USA) y Atle Selberg (Institute for Advanced Study, Princeton, USA)
1987	Kiyoshi Ito (Kyoto University, Kyoto, Japan) y Peter D. Lax (New York University, N.Y., USA)
1988	Friedrich Hirzebruch (Max-Planck-Institut and University of Bonn, Bonn, W. Germany) y Lars Hormander (University of Lund, Lund, Sweden)
1989	Alberto P. Calderon (University of Chicago, Chicago, USA) y John W. Milnor(Institute for Advanced Study, Princeton, USA)
1990	Ennio de Giorgi (Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy) y Ilya Piatetski-Shapiro (Tel-Aviv University, Tel Aviv, Israel)
1992	Lennart A. E. Carleson (University of Uppsala, Uppsala, Sweden, y U.C.L.A, Los Angeles, U.S.A) y John G. Thompson (University of Cambridge, Cambridge, U.K.)
1993	Mikhael Gromov (Institut des Hautes Etudes Scientifiques (IHES), Bures-Sur-Yvette, France) y Jacques Tits (College de France, Paris, France)
1994-95	Jürgen K. Moser (Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, Switzerland)
1995-96	Robert Langlands (Institute for Advanced Study, Princeton, USA) y Andrew J. Wiles (Princeton University, Princeton, N.J., USA)
1996-97	Joseph B. Keller (Stanford University, Stanford, California, USA) y Yakov G. Sinai (Princeton University, Princeton, N.J., USA y Landau Institute of Theoretical Physics, Moscow, Russia)

1999	László Lovász (Yale University, New Haven, Connecticut, USA y Eotvos University, Budapest, Hungary) y Elias M. Stein (Princeton University, Princeton, New Jersey, USA)
2000	Raoul Bott (Harvard University, Cambridge, Mass., USA) y Jean-Pierre Serre (College de France, Paris, France)
2001	Vladimir I. Arnold (Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia y University Paris-Dauphine, Paris, France) y Saharon Sellah (Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, Israel)
2002-03	Mikio Sato (Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto, Japan) y John T. Tate (Department of Mathematics, University of Texas, Austin, Texas, USA)
2005	Gregory A. Margulis (Yale University, New Haven, Connecticut, USA) Sergei P. Novikov (University of Maryland, College Park, Maryland, USA)

El premio anual Ramanujan para matemáticos jóvenes (menos de 45 años) de países en desarrollo fue creado con fondos del Niels Henrik Abel Memorial, y lleva el nombre del gran matemático Indio Srinivasa Ramanujan (1887-1920).

El premio es de US$ 10,000 en efectivo además de los gastos para el viaje y viáticos para que el ganador pueda visitar el Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP) en Trieste, Italia, para recibir su premio y dar su conferencia.

El primer ganador del premio Ramanujan fue el brasileño Marcelo Viana del Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA) por sus trabajos en sistemas dinámicos. La ceremonia de premiación se llevó a cabo el 15 de diciembre del 2005 en el ICTP.

Un premio bastante reciente es el Gauss que será otorgado por primer vez en el 2006 y cada cuatro años en un Congreso Internacional de Matemática (ICM). Es un premio para los trabajos de investigación en matemática que han tenido un impacto fuera de la matemática (en la tecnología, en los negocios o en situaciones de la vida diaria), creado en honor a uno de los mayores matemáticos de todos los tiempos, Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

El premio de gauss será otorgado conjuntamente por el Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV = Unión Matemática Alemana) y la Internacional Mathematical Union (IMU), y administrado por el DMV. El premio consta de una medalla y un premio monetario de 10,000 euros. El origen del premio es un excedente del Congreso Internacional de Matemáticos (ICM 98) llevado a cabo en Berlín. Con el premio Gauss el IMU está ampliando el rango de sus premios, incluyendo la influencia de matemática en otras disciplinas. La ceremonia de premio incluirá una visión general de los logros del ganador.

Medalla Gauss

La American Mathematical Society (AMS) administra varios premios. Dos de ellos son el premio Bôcher y el premio Cole.

El premio Bôcher es otorgado por la American Mathematical Society (AMS) en memoria de Maxime Bôcher, quién desempeñó como presidente de este organismo de 1909-1910. La donación original fue aportada por miembros de la sociedad. El premio es otorgado para un trabajo destacado en el análisis y publicado durante los seis años precedentes. Para ser elegible, el escritor debe ser un miembro de la AMS o el trabajo debe haber sido publicado en una revista norteamericana reconocida. Actualmente el premio es de US$ 5,000 y se otorga cada tres años. Sus ganadores son: Birkhoff G. D. (1923), Bell, E. T. (1924), Alexander J. W. (1928); Marston Morse (1933), John von Neumann (1938), Jesse Douglas (1943), Schaeffer A. C. y Spencer D. C. (1948), Norman Levinson (1953), Nirenberg L. (1959), Cohen P. (1964), Ornstein D. (1974), Calderón A. (1979), Caffarelli L. (1984), Melrose R. (1984), Schoen R. (1989), Simon L. (1994), Christodoulou D. (1999), Tataru D. (2002), Merle F. (2005). El siguiente premio será otorgado en enero del 2008.

Otro premio dado por la American Mathematical Society (AMS) es el premio Cole en honor de Frank Nelson Cole, ex secretario de la AMS y jefe editor del Bulletin por 21 años. Cole hizo una donación económica a la sociedad en 1928 durante su retiro y esta fue aumentada miembros de la sociedad y posteriormente duplicada por su hijo Charles. Este premio de US$ 5,000 se otorga cada tres años para las contribuciones sobresalientes en álgebra y teoría de números y obedece a las mismas reglas del premio Bôcher (ser un miembro de la AMS o el trabajo debe haber sido publicado en una revista norteamericana reconocida). El primer ganador fue L. E. Dickson (1928) y entre los ganadores encontramos a matemáticos muy reconocidos como Paul Erdös (1951), J. T. Tate (1956), S. Lang (1960), R. P. Langlands y B. Mazur (1982), Andrew Wiles (1997). El siguiente premio será otorgado en enero del 2008.

La lista completa de los premios administrados por la AMS es la que sigue:

Premio	Descripción	Cantidad	Frecuencia	Contacto
George David Birkhoff Prize en Applied Mathematics	Para una contribución sobresaliente en matemática aplicada.	US$5,000	Tres años	http://www.ams.org/prizes/birkhoff-prize.html
Bôcher Memorial Prize	Para un artículo destacado publicado durante los seis años previos en una revista reconocida en los Estados Unidos	US$5,000	Tres años	http://www.ams.org/prizes/bocher-prize.html
Frank Nelson Cole Prize in Algebra	Para un artículo destacado en álgebra publicado durante los seis años previos en una revista reconocida en los Estados Unidos	US$5,000	Tres años	http://www.ams.org/prizes/cole-prize-algebra.html
Frank Nelson Cole Prize in Number Theory	Para un artículo destacado en teoría de números publicado durante los seis años previos en una revista reconocida en los Estados Unidos	US$5,000	Tres años	http://www.ams.org/prizes/cole-prize-number-theory.html
Levi L. Conant Prize	Para el mejor artículo expositório publicado en el	US$1,000	Un año	http://www.ams.org/prizes/conant-prize.html

	Notices de la AMS o el Bulletin de la AM			
Joseph L. Doob Prize	Para un libro de investigación sobresaliente con contribución muy influyente a la literatura de la investigación.	US$5,000	Tres años	http://www.ams.org/prizes/doob-prize.html
Delbert Ray Fulkerson Prize	Para artículos publicados durante los 6 años precedentes al año del International Congress of the Mathematical Programming Society	US$1,500	Tres años	http://www.ams.org/prizes/fulkerson-prize.html
E. H. Moore Research Article Prize	Para un artículo de investigación destacado y publicado en una de las revistas de la AMS en los 6 años previos al premio	US$5,000	Tres años	http://www.ams.org/prizes/moore-prize.html
Frank and Brennie Morgan Prize for Outstanding Research in Mathematics by an Undergraduate	Para un estudiante de universitario de grado que haga importante investigación en matemática	US$1,000	Un año	http://www.ams.org/prizes/morgan-prize.html

Student				
David P. Robbins Prize	Para un artículo novedoso de investigación en álgebra combinatoria o en matemática discreta y tenga un componente experimental significativo	US$5,000	Tres años	http://www.ams.org/prizes/robbins-prize.html
Ruth Lyttle Satter Prize in Mathematics	Para una destacada contribución a la investigación matemática, realizada por una mujer en los seis años prévios.	US$5,000	Dos años	http://www.ams.org/prizes/satter-prize.html
Leroy P. Steele Prize for Lifetime Achievement	Por la influencia acumulada de trabajos matemáticos, alto nivel de investigación, influencia en el desarrollo del campo y sobre estudiantes de doctorado.	US$5,000	Un año	http://www.ams.org/prizes/steele-prize.html
Leroy P. Steele Prize for Mathematical Exposition	Para un libro o artículo de investigación explicativo	US$5,000	Un año	http://www.ams.org/prizes/steele-prize.html
Leroy P. Steele Prize for Seminal Contribution to Research	Para un artículo determinado como fundamental en su campo o bien un modelo	US$5,000	Un año	http://www.ams.org/prizes/steele-prize.html

	de investigación importante.			
Oswald Veblen Prize in Geometry	Para investigación en geometría o topología, publicada en los seis años previos en una revista reconocida en los Estados Unidos.	US$5,000	Tres años	http://www.ams.org/prizes/veblen-prize.html
Albert Leon Whiteman Memorial Prize	En reconocimiento a una notable exposición y excepcional erudición en historia de la matemática	US$4,000	Cuatro años	http://www.ams.org/prizes/whiteman-prize.html
Norbert Wiener Prize in Applied Mathematics	Para destacada contribución a la matemática aplicada	US$5,000	Tres años	http://www.ams.org/prizes/wiener-prize.html

Los siete problemas del milenio

En el año 2000, año mundial de las matemáticas, y 100 años después que David Hilbert presentó su famosa lista con 23 problemas para los futuros matemáticos en el Congreso Internacional de Matemática en París, el Instituto Clay Mathematics de Cambridge, Massachussets (CMI) seleccionó los *siete problemas premio del milenio*, enfocando sobre problemas matemáticos clásicos e importantes, que han resistido la solución con el paso de los años. Se ha establecido un premio de un millón de dólares para la solución de cada uno de los siete problemas:

- Hipótesis de Riemann
- Conjetura de Poincaré
- Conjetura de Hodge
- Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer
- Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes

- La formulación de la teoría de Yang-Mills
- La determinación de si problemas NP son en realidad problemas P.

Una de las reglas del premio establece que la solución propuesta deberá estar expuesta previamente, por un periodo de al menos dos años, al escrutinio de la comunidad matemática internacional.

En realidad existen cuatro filtros que una solución debe pasar: uno, ser publicada en una revista de prestigio mundial, para lo cual han de aceptarla los recensores habituales de la misma; dos, tener "aceptación general" dos años después de su publicación; tres, poseer el visto bueno del comité científico del Instituto Clay y cuatro, obtener el visto bueno de un segundo comité más especializado que se creará expresamente para estudiar esa solución.

El instituto Clay fue legado por el millonario estadounidense Landon T. Clay, quién donó parte de su fortuna personal para el establecimiento del instituto cuyo objetivo principal es incrementar y difundir el conocimiento de las matemáticas. Este instituto otorga becas para realizar investigación en matemáticas y para realizar estudios post-doctorales en matemática a estudiantes destacados. Un profesor de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa rica, el Dr. José Alexander Ramírez, fue beneficiado con una beca del instituto Clay para realizar estudios post-doctorales en matemática en la Universidad de Cornell en Nueva York.

1. Hipótesis de Riemann

La función zeta de Riemann es la función de variable compleja

$$\varsigma(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(s) > 1 \qquad (1)$$

La serie anterior converge absolutamente en el semiplano $\operatorname{Re}(s) > 1$. En 1859 Bernhard Riemann, en el artículo “Über die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grösse” (Sobre los números primos menores que una cantidad dada), mostró que $\varsigma(s)$ se extiende a todo el plano complejo $\mathbb{C}$ como una función meromórfica, con polo simple únicamente en $s = 1$, con residuo 1, y que satisface la ecuación funcional

$$\xi(s) := \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\varsigma(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\varsigma(1-s) = \xi(1-s) \qquad (2)$$

siendo Γ la función gama.

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Berliner Monatsberichte, 1859, November.*)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\,dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

erhält man zunächst

$$\Pi(s-1)\cdot\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1}.$$

Betrachtet man nun das Integral

$$\int \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x-1}$$

von $+\infty$ bis $+\infty$ positiv um ein Grössengebiet erstreckt, welches den Werth 0, aber keinen andern Unstetigkeitswerth der Function unter dem Integralzeichen im Innern enthält, so ergiebt sich dieses leicht gleich

$$(e^{-\pi si} - e^{\pi si})\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1},$$

vorausgesetzt, dass in der vieldeutigen Function $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\lg(-x)}$ der Logarithmus von $-x$ so bestimmt worden ist, dass er für ein negatives x reell wird. Man

Página del manuscrito de Riemann (1859)

Utilizando la serie alternante

$$\eta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

que es con convergente si $s>0$ se puede extender $\varsigma(s)$ para $s>0$ pues

$$\varsigma(s)=\frac{\eta(s)}{1-2^{(1-s)}}$$

y mediante (2) – fórmula sugerida por Euler en 1749 y demostrada por Riemann y en 1859 – se extiende $\varsigma(s)$ para $s<0$. Finalmente Riemann extendió $\varsigma(s)$ en el plano complejo.

La función zeta de Riemann se relaciona con los números primos de la siguiente forma: Gauss en 1793 y posteriormente Legendre en 1800 conjeturaron el Teorema de los Números Primos (TNP),

$$\Pi(N)\sim\frac{N}{\ln N}$$

En dónde $\Pi(N)$ representa la cantidad de números primos menores o iguales a N, y el símbolo $\sim$ significa que la cantidad de la izquierda tienda asintóticamente a la cantidad de la derecha, es decir,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\Pi(N)\ln N}{N}=1.$$

Esto nos dice que la densidad de los números primos es aproximadamente $1/\ln N$ cuando N es muy grande, o bien que en un vecindario de un número natural N muy grande, la probabilidad de que un número sea primo es aproximadamente $1/\ln N$.

Gauss (1777-1855) empezó a trabajar en el TNP mientras que Legendre publicó un libro en 1798 titulado "Essay on the Theory of Numbers" en el que conjeturó que

$$\Pi(N)\sim\frac{N}{A\ln N+B},\ A,B\in\mathbb{R}.$$

En una nueva edición de su obra él refinó su conjetura, pero no la demostró, afirmando que

$$\Pi(N) \sim \frac{N}{\ln N - 1.08366}.$$

En 1849 Chebyshev demostró que si $\Pi(N) \sim \frac{CN}{\ln N}$ para algún C fijo entonces $C = 1$.

Por otro lado, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \varsigma(2)$ conocida como serie Bassel, analizada primeramente por los Bernoullis, converge – como lo demostró Euler en 1735 – a $\pi^2/6$. Euler también calculó los valores de la serie – en forma cerrada - para otros valores pares de s,

s	$\sum 1/n^s$
2	$\pi^2/6$
4	$\pi^4/90$
6	$\pi^6/945$

Pero no se conocía nada para s impar, excepto para $s = 1$, la serie armónica que diverge. En 1978 se demostró que la serie converge a un número irracional cuando $s = 3$.

Euler encontró una forma de expresar $\varsigma(s)$ en términos de productos relacionados con los números primos y publicó el resultado en su libro “Introductio in Analysin Infinitorum” publicado en 1748,

$$\varsigma(s) = \prod_{p \text{ primo}} (1 - p^{-s})^{-1}, \; s > 1.$$

El producto anterior se hace sobre todos los números primos. La fórmula anterior se conoce como *llave de oro* o *producto de Euler*.

En 1859 Riemann afirmó, sin demostrar, que

$$\Pi(N) \sim Li(N) := vp\int_0^N \frac{dt}{\ln t}.$$

Esta es una versión mejorada del TNP pues la integral logarítmica $Li(N)$ es una mejor estimación para $\Pi(N)$ que $N/\ln N$.

La función $\varsigma(s)$ tiene ceros en los enteros pares negativos, $-2,-4,-6,\cdots$ denominados ceros triviales. ¿Existen ceros no triviales? Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué regiones se ubican?

En la cuarta página del artículo de Riemann aparece la siguiente afirmación:

Hipótesis de Riemann: Todos los ceros no triviales de $\varsigma(s)$ tienen parte real igual a $1/2$.

Esto nos dice que si $\varsigma(s)=0$ y s no es un cero trivial entonces s se encuentra en la recta crítica $\frac{1}{2}+i\,t,\ t\in\mathbb{R}$.

Si la hipótesis de Riemann es verdadera entonces el TNP también es verdadero, pero la recíproca no es cierta.

En 1895 Hans von Mangoldt demostró el resultado principal del artículo de Riemann que liga $\Pi(x)$ con $\varsigma(s)$. La demostración del TNP se llevó a cabo en 1896 de manera independiente por Jacques Hadamard y Charles de la Vallée Poussin.

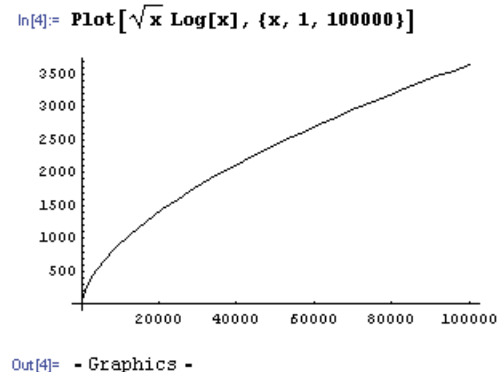
En 1900, en ocasión del segundo congreso internacional de matemática, David Hilbert presentó 23 problemas matemáticos muy importantes no resueltos. La hipótesis de Riemann era el problema número 8. Además, en 1900 se sabía que:

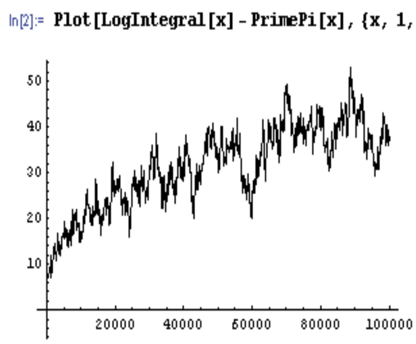
- Existían infinitos ceros de $\varsigma(s)$ con $0<\mathrm{Re}(s)<1$.
- Si $s\in\mathbb{C}$ es un cero de $\varsigma(s)$ entonces su conjugado completo $\bar{s}$ también lo es.
- Los ceros de $\varsigma(s)$ tienen parte real simétrica respecto a la recta crítica.

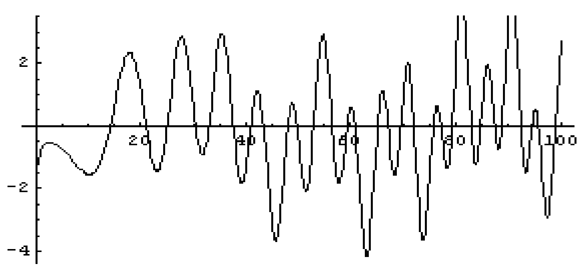
En 1914 Hardy, en el artículo "Sur les zéros de la fonction $\varsigma(s)$ de Riemann" demostró que *"existen infinitos ceros no triviales de $\varsigma(s)$ que satisfacen la hipótesis de Riemann"*.

En 1901 Von Koch demostró que si la hipótesis de Riemann es verdadera entonces

$\Pi(x)=Li(x)+O(\sqrt{x}\ln x).$







Gráfica de $\varsigma(s)$ sobre la recta crítica

En 1903 el matemático Danés Jørgen Gran publicó una lista con los primeros 15 ceros no triviales de - y por lo tanto 30 pues sus conjugados también son ceros - $\varsigma(s)$, todos en la recta crítica. Posteriormente Andrew Odlyzko publicó una lista con 1000 ceros de $\varsigma(s)$.

En 1986 Riele, van de Lune y otros utilizaron supercomputadoras para comprobar que cada uno de los primeros 1.500.000.001 ceros complejos se encuentran sobre la recta crítica.

En agosto del 2001, Sebastián Wedeniwski inició un proyecto computacional denominado ZetaGrid para calcular los ceros de $\varsigma(s)$. El 18 de febrero del 2005 reportaron que lograron calcular 1029.9 mil millones de ceros.

Se han hecho muchos progresos en el estudio de la hipótesis de Riemann, además de conjeturas relacionando los ceros de $\varsigma(s)$ con los valores propios de algún operador Hermitiano (conjetura de Hilbert-Pólya) o bien generalizando la hipótesis hacia la Gran Hipótesis de Riemann. Varios de estos avances se encuentran en los artículos publicados por Bombieri (2000) y por Sarnak (2004). También existe un libro disponible gratuitamente sobre la historia de la hipótesis de Riemann, escrito por Derbyshire (2003).

A continuación describiremos de forma breve los restantes problemas, reconociendo previamente que ellos también son bastante importantes.

2. Conjetura de Poincaré

Un curioso criterio de clasificación de superfícies está formulado en relación con el hecho de que las superficies posean o no "agujeros" u "orificios". Aquellas que no los poseen se denominan superficies *simplemente conexas*.

En Topología, si una superficie puede ser deformada continuamente en otra, entonces las dos son "esencialmente iguales" ya que aquellas propiedades que interesan al topólogo no son afectadas durante el proceso de deformación. Los topólogos utilizan la expresión técnica *superficies homeomorfas* para referirse a aquellas superficies que son "esencialmente iguales".

El problema de clasificar las variedades en el espacio usando como criterio de clasificación el concepto de homeomorfismo fue completamente resuelto en el siglo XIX. Por ejemplo, se observó que la esfera (superficie esférica) es una variedad de dimensión 2 (cada trozo pequeño de la esfera es un pequeño trozo de plano ligeramente deformado), cerrada y simplemente conexa. La intuición sugiere que estas propiedades parecen caracterizar topológicamente la esfera. En efecto, se estableció que toda variedad de dimensión 2, cerrada y simplemente conexa es homeomorfa a la esfera, es decir, esencialmente, sólo hay una variedad de dimensión 2, cerrada y simplemente conexa, y se trata de la esfera.

En 1904, el matemático francés Jules Henry Poincaré (1854-1912) conjeturó que el resultado obtenido para la esfera del espacio de dimensión 3 tenía un análogo para la esfera del espacio de dimensión 4.

En su forma original, la conjetura de Poincaré establece que

> *En el espacio de dimensión 4, toda variedad de dimensión 3, cerrada y simplemente conexa, es homeomórfica a la esfera de dimensión 3*

En otras palabras, la conjetura dice que la esfera de dimensión 3 es el único tipo del espacio tridimensional acotado posible que no contiene ningún agujero. Se encuentra disponible en Internet una descripción del problema escrita por John Milnor (2000).

Una técnica empleada con éxito algunas veces por los matemáticos para intentar resolver un problema difícil es particularizarlo, resolver el problema particular y, con las pistas que esto proporciona, retornar al problema original. En el otro extremo se encuentra la técnica de generalizarlo, resolver el problema generalizado y, con la visión que de este modo se logra, retornar al problema original. Con este último enfoque, se procedió a generalizar la Conjetura de Poincaré a espacios de dimensión arbitraria adquiriendo la siguiente forma:

> *En el espacio de dimensión $n+1$, toda variedad compacta de dimensión n, cerrada es homotópicamente equivalente a la esfera de dimensión n si y sólo si es homeomorfa a la esfera de dimensión n.*

La conjetura de Poincaré es un problema complicado y han surgido muchas demostraciones falsas, siendo una de las primeras de ellas debido al propio Poincaré. Cuatro años antes de formular su conjetura, Poincaré creyó tener una demostración, pero poco después encontró un contraejemplo. En 1934 John Henry Constantine Whitehead propuso otra demostración, pero él mismo construyó un contrajemplo conocido como enlace de Whitehead. Lo positivo de todo esto es que este problema ha permitido obtener una comprensión más profunda de la topología de las variedades.

El caso $n=1$ de la conjetura generalizada es trivial. El caso $n=2$ es clásico y conocido por los matemáticos del siglo XIX. Erick Christopher Zeeman demostró en caso para $n=5$ en 1961. Este mismo año Stephen Smale la demostró para $n \geq 7$ mientras que en 1962 John R. Stallings hizo la demostración para $n=6$. Para $n=4$ la demostración de Michael Hartley Freedman en 1982 lo llevó a ganar una medalla Fields en 1986. Pero, a pesar del éxito obtenido con la generalización, el caso original $n=3$ resistía a todo intento de demostración.

demostración no ha sido completamente verificada todavía).

En el año 200, el Clay Mathematics Institute incluyó la conjetura – el caso $n=3$ - en su lista de problemas premio de US$1 millón.

En abril del 2002, Dunwoody produjo un trabajo de cinco páginas que pretendía demostrar la conjetura, sin embargo, se encontró que la demostración era incorrecta (Weisstein 2002).

El 16 de octubre de 2002, Everett Pitcher, ex profesor del Departamento de Matemáticas de Lehigh University desde 1938 hasta 1978 y además Secretario de la American Mathematical Society desde 1967 hasta 1988, presentó, en Lehigh University, una conferencia titulada *The Poincaré Conjecture is True*. Pitcher sometió el documento correspondiente para publicación pero aún no parece haber reportes de aceptación. El 22 de octubre de 2002, Sergey Nikitin de Arizona State University, publicó un *preprint* en *arXiv e-Print Archive*, en el que propone otra demostración de la Conjetura de Poincaré reduciéndola al caso de ciertas variedades denominadas estelares (el 31 de octubre, el grupo de noticias *sci.math.research* publicó un supuesto contraejemplo para esta demostración). Entre el 30 de octubre y el 10 de diciembre, Nikitin agregó siete versiones del *preprint* con correcciones y mejoras. El *preprint* aún está expuesto en arXiv pero en este caso tampoco parece haber comentarios al respecto en los medios.

Un resultado mucho más prometedor ha sido reportado por Perelman (2002, 2003; Robinson 2003).

En 11 de noviembre de 2002 el reconocido matemático ruso Grigory Perelman, del Instituto Steklov de la Academia Rusa de Ciencias en San Petersburgo y especialista en geometría diferencial, publicó en arXiv un *preprint* de 39 páginas denominado *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric application*, en el que presentaba una demostración de una conjetura más general que implica la de Poincaré, denominada la *Conjetura de Geometrización de Thurston*. Esta última conjetura fue propuesta en 1970 por el matemático William Paul Thurston (ganador de una Medalla Fields en 1982 por su trabajo de investigación acerca de las variedades de dimensiones 2y 3) y en ella se plantea una clasificación muy precisa de todas las variedades tridimensionales.

El 10 de marzo de 2003, Perelman publicó en arXiv un segundo *preprint* de 22 páginas con el título *Ricci flow with surgery on three−manifolds* en el cual anuncia algunas mejoras y complementa varios aspectos del *preprint* del 11 de noviembre. Ambos *preprints* son de un nivel altamente técnico, accesibles prácticamente sólo a los especialistas del área.

Los días 7, 9 y 11 de abril de 2003, Perelman ofreció un ciclo de conferencias públicas en el Departamento de Matemáticas del Massachusetts Institute of Technology (MIT). El ciclo se tituló *Ricci Flow and Geometrization of Three−Manifolds*. Esta fue la primera discusión pública de Perelman sobre los resultados contenidos en sus dos *preprints* expuestos en arXiv.

Hasta ahora parece que las demostraciones no contienen errores, pero todavía se encuentra bajo revisión de acuerdo a las reglas del órgano que concede los premios.

3. Conjetura de Hodge

En el siglo XIX se descubrieron técnicas para investigar la forma de objetos geométricos complicados a partir de bloques más simples.

La conjetura de Hodge asegura que, para ciertos tipos de espacio denominados variedades algebraicas proyectivas, las piezas denominadas ciclos Hodge son combinaciones lineales racionales de piezas geométricas conocidas como ciclos algebraicos.

> *En una variedad sobre* $\mathbb{C}$ *no singular proyectiva, cualquier clase Hodge es una combinación lineal racional de clases* $\mathrm{cl(Z)}$ *de ciclos algebraicos.*

La descripción oficial del problema se encuentra disponible en Internet (Deligne, 2000).

4. Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer

El problema número 10 presentado por D. Hilbert en 1900 se relacionaba con la determinación de la resolubilidad de las ecuaciones diofánticas. Yu V. Matiyasevich demostró en 1970 la no existencia de un método general para resolver dichas ecuaciones, pero la conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer afirma que en el caso de las ecuaciones diofánticas generales, cuando éstas son los puntos de una variedad abeliana, el conjunto de los puntos que son soluciones racionales de las mismas depende de la función zeta de Riemann asociada.

Empezando la década de 1960, B. Birch y H. P. F. Swinnerton-Dyer conjeturaron que si una dada curva elíptica tenía un número infinito de soluciones, entonces la serie-L asociada tiene valor cero en un cierto punto fijo.

> *La expansión de Taylor de* $\mathrm{L(C,s)}$ *en* $s=1$ *tiene la forma* $L(C,s)=c(s-1)^r+\text{terminos de orden superior}$ *con* $c\neq 0, r=\mathrm{rango}(C(\mathbb{Q}))$. *En particular* $L(C,1)=0 \Leftrightarrow C(\mathbb{Q})$ *es infinito.*

En 1976, Coates y Wiles mostraron que curvas elípticas con multiplicación compleja con un número infinito de soluciones, tienen series-L que son cero en el punto fijo relevante (teorema de Coates-Wiles), pero no pudieron demostrar la recíproca. V. Kolyvagin extendió este resultado a curvas modulares (Wiles, 2000 para una descripción del problema).

5. Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes son ecuaciones en derivadas parciales que describen la dinámica de fluidos incompresibles en dos o en tres dimensiones. Las ecuaciones ligan las velocidades de las partículas del fluido, su viscosidad, presión y fuerzas externas aplicadas. El problema consiste en estudiar la existencia y diferenciabilidad de las soluciones de estas ecuaciones.

Para una descripción del problema consultar el artículo escrito por Charles Fefferman (2000).

6. Formulación de la teoría de Yang-Mills

En mediados del siglo pasado Yang y Mills introdujeron un nuevo marco de referencia para describir partículas elementales usando estructuras que también ocurren en geometría. La teoría cuántica de Yang - Mills es ahora el fundamento de la mayoría de teorías de partículas elementales, y sus pronósticos han sido evaluados en muchos laboratorios experimentales, pero su fundamento matemático todavía está poco claro. El exitoso uso de la teoría de Yang - Mills para describir interacciones fuertes de partículas elementales depende de una propiedad sutil de la mecánica cuántica denominada “mass gap”: las partículas cuánticas tienen masa positiva, aunque las ondas clásicas desplacen a la velocidad de la luz. Esta propiedad ha sido descubierta por físicos experimentales y confirmada por simulaciones computacionales, pero todavía no ha sido comprendida desde el punto de vista teórico. El progreso in establecer la existencia del teoría de Yang - Mills y la “mass gap” requieren la introducción de las nuevas ideas fundamentales tanto en física y en matemática.

El problema consiste en dar un fundamento matemático riguroso de esta teoría a ciertas propiedades de las interacciones fuertes y el confinamiento de los quarks. Como escribe Doublas (2004) hay que demostrar que para todo grupo gauge compacto simple G existe la teoría cuántica Yang-Mills de $\mathbb{R}^4$ y tiene “mass gap” $\Delta > 0$.

Para una descripción del problema, consultar la descripción oficial del problema por Arthur Jaffe y Edgard Witten (2000). Otro artículo escrito por Michael R. Douglas (2004) proporciona el estado reciente del problema.

7. Determinación de si problemas NP son problemas P

El problema P versus NP consiste en determinar si cada lenguaje aceptado por algún algoritmo no determinístico en tiempo polinomial también es aceptado por algún algoritmo (determinístico) en tiempo polinomial.

Informalmente la clase P es la clase de problemas de decisión resolubles por algún algoritmo en varios pasos limitados por algún polinomio fijo en la longitud de su entrada. Formalmente, los elementos de la clase P son lenguajes.

$$P = \left\{ L \mid L = L(M) \text{ para alguna maquina de Turing que corre en tiempo polinomial} \right\}$$

La notación NP se utiliza para "tiempo polinomial no determinístico" pues originalmente NP fue definido en relación con máquinas no determinísticas (es decir, máquinas que tienen más de un movimiento posible para una configuración dada). Un problema es NP si es resoluble en tiempo polinomial por una máquina de Turing no determinística.

Todo problema P (cuyo tiempo de solución es acotado por un polinomio) es NP. Si sabemos que un problema es NP y conocemos su solución entonces la demostración de la corrección de la solución siempre puede ser reducida a una simple verificación en tiempo polinomial. Si P y NP no son equivalentes entonces la solución de problemas NP requerirá (en el peor de los casos) de una búsqueda exhaustiva.

Un problema es NP-difícil (hard) si un algoritmo para solucionarlo puede ser trasladado a uno para solucionar cualquier otro problema NP. Es mucho más fácil mostrar que un problema es NP que mostrar que es NP-difícil. Un problema que es NP y NP-difícil es denominado un problema NP-completo.

Para una descripción oficial del problema, consultar el artículo escrito por Stephen Cook (2000).

REFERENCIAS

American Mathematical Society. "AMS Funds and Prizes." Disponible en http://www.ams.org/secretary/prizes.html

Bombieri, E. "Problems of the millennium: The Riemann Hypothesis." Disponible en http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/Official_Problem_Description.pdf

Clay Mathematics Institute. "Millennium Prize Problems." http://www.claymath.org/millennium/

Cook, S. (2000). "The P versus NP problems." Disponible en http://www.claymath.org/millennium/P_vs_NP/Official_Problem_Description.pdf

Deligne, P. (2000). “The Hodge conjecture”. Disponible en http://www.claymath.org/millennium/Hodge_conjecture/Official_Problem_Description.pdf

Derbyshire, J. (2003). *Prime obsession: Bernhard Riemann and the greatest unsolved problem in Mathematics*. Disponible en http://www.nap.edu/catalog/10532.html

Douglas, M. (2004). “Report on the status of the Yand-Mills Millenium Prize Problem”. Disponible en http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills_theory/ym2.pdf

Dunwoody, M. J. "A Proof of the Poincaré Conjecture." Disponible en http://www.maths.soton.ac.uk/pure/viewabstract.phtml?entry=655. Rev. Apr. 9, 2002.

Fefferman, C. (2000). “Navier-Stokes Equations”. Disponible en http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/Official_Problem_Description.pdf

Jaffe, A. & Witten, E. (2000). “Quantun Yang-Mills theory”. Disponible en http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills_theory/Official_Problem_Description.pdf

MacTutor History of Mathematics Archives. "Mathematical Societies, Medals, Prizes, and Other Honours." http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Societies/.

Maor E. (1998). Trigonometric Delights. New Jersey: Princeton University Press.

Milnor, J. (2000). “The Poincaré Conjecture”. Disponible en http://www.claymath.org/millennium/Poincare_conjecture/Official_Problem_Description.pdf

O´Connor J. & Robertson E. *The trigonometric functions*. Disponible en http://www-history.mcs.st andrews.ac.uk/HistTopics/Trigonometric_functions.html

Perelman, G. "The Entropy Formula for the Ricci Flow and Its Geometric Application" 11 Nov 2002. Disponible en http://arxiv.org/abs/math.DG/0211159/.

Perelman, G. "Ricci Flow with Surgery on Three-Manifolds" 10 Mar 2003. Disponible en http://arxiv.org/abs/math.DG/0303109/.

Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Proyecto ZetaGrid. http://www.zetagrid.net

Robinson, S. "Russian Reports He Has Solved a Celebrated Math Problem." *The New York Times*, p. D3, April 15, 2003.

Sarnak, P. “Problems of the millennium: The Riemann Hypothesis (2004).” Disponible en http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/ Sarnak_RH.pdf

Smale, S. "Generalized Poincaré's Conjecture in Dimensions Greater than Four." *Ann. Math.* **74**, 391-406, 1961.

Stallings, J. "The Piecewise-Linear Structure of Euclidean Space." *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **58**, 481-488, 1962.

Weisstein, E. "Hodge Conjecture." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/HodgeConjecture.html

Wiles, A. (2000). "The Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture." Disponible en http://www.claymath.org/millennium/Birch_and_Swinnerton-Dyer_Conjecture/BSD.pdf.

Zeeman, E. C. "The Generalised Poincaré Conjecture." *Bull. Amer. Math. Soc.* **67**, 270, 1961.