Magia y personalidad de los números[1]

Manuel Murillo Tsijli[2]

"Detrás de las paredes,
juegan los dioses;
juegan con números,
de los que está hecho el universo"
Le Corbusier

Introducción

Por estos días he leído que la cantidad de matrimonios que se efectuarán en la fecha del 7 de julio de 2007 han cuadruplicado los de otras fechas, la razón es muy simple, esta fecha contienen tres sietes (7-7-7) y el número 7 se relaciona con la buena suerte, y una ayuda de estas a la esperanza de que el matrimonio sea para toda la vida, no está de más.

A través del tiempo, algunos números que satisfacen determinada propiedad, han sido objeto de estudio y en algunos casos se les ha relacionado con la religión, la superstición, la suerte y hasta con la magia. Así como las personas son altas o bajas, delgadas o gruesas, amigables, organizadas, sensatas, buenas o malas, entre muchas más, los números tienen su propia personalidad y se ha utilizado, desde la magna Grecia, nombres muy sugestivos para su comportamiento.

Las matemáticas son absolutamente necesarias para la magia, afirmaba Heinrich Cornelius Agrippa, famoso mago filosófico del siglo XVI "*pues todo cuanto se realiza por virtud natural está gobernado por el número, el peso y la medida. Cuando un mago obedece a la filosofía natural y a las matemáticas, y conoce las ciencias intermedias que de ella proceden -aritmética, música, geometría, óptica, astronomía, mecánica- puede realizar cosas maravillosas*".

Al tercer día resucita Jesús, 3 conforman la Santísima Trinidad, son 5 los sentidos, 7 son los pecados capitales (pereza, gula, envidia, lujuria, soberbia, ira y avaricia), 7 los Sacramentos, 7 las virtudes teologales (templanza, caridad, humildad, largueza, castidad, paciencia y diligencia), 7 las vidas del gato, 7 los sabios de la antigüedad y 7 las maravillas del mundo, son 7 las notas musicales y 7 los colores del arco iris (rojo, naranja, amarillo, verde, azul, añil y violeta), en la religión islámica hay 7 estadios o cielos y para el hinduismo existen 7 *chakras* en el cuerpo humano. En la mitología griega, al Minotauro que encerró Minos en el laberinto que construyó Dédalo, se le ofrecían cada año 7 muchachos y 7 doncellas de Atenas. Claro que de los bailes más famosos tenemos la *Danza de los* 7 *velos* y los marineros más exitosos, como Simbad, son los que han cruzado los 7 mares.

Por otro lado, en La Biblia se presentan muchos pasajes en donde el número escogido no es al azar, por ejemplo, en Génesis 41:15-29, se habla de 7 vacas flacas y 7 vacas gordas, en Juan 21:11, se menciona 153 peces en una red, número con muchas propiedades, entre ellas, el ser de 3 dígitos que incluye a 3 y el ser tricúbico, véase página 9; en Apocalipsis 13:18 se da al 666 el número de *La Bestia*, en el Capítulo 6, son 7 los sellos que se rompen antes de que se desate la ira de Dios y serán 7 también los ángeles que hagan sonar las 7 trompetas

[1] Publicado en: www.cientec.or.cr, fecha: 1 de abril de 2007.

[2] Instituto Tecnológico de Costa Rica y Universidad Estatal a Distancia, correo electrónico: mmurillo@itcr.ac.cr, mamurillo@uned.ac.cr

para enviar los 7 castigos sobre los injustos, en los 7 cuernos. Otros ejemplos se pueden ver en Génesis 2:3, en Mateo 18:21-22 y en Job 1:2-3 y 2:13 o consultar en [14].

Para muchos, el número 7 es mágico, es la unión de lo divino y lo terrenal pues es la suma del 3 y el 4, conocidos como el número *divino* y el número terrestre respectivamente.

En los cuentos infantiles, los números primos son utilizados con bastante frecuencia: 3 cochinitos, los 7 enanos de Blancanieves, los 3 mosqueteros de Dumas, la banda de 41 ladrones de Alí Babá, 101 dálmatas, el Sastrecillo Valiente que mata a 7, moscas y no gigantes, de un solo golpe, entre muchos otros cuentos.

Además, autores como Isaac Asimov, escritor en temas de ciencia ficción y divulgación científica, véase entre muchos [1] ó [2] iniciando con *Yo robot*, *Fundación* y *El hombre bicentenario*; Martin Gardner como gran exponente en la divulgación de las matemáticas recreativas, en muchos problemas y relatos utiliza las propiedades de los números primos y capicúas, por ejemplo su *Circo Matemático* [4]; Carl Sagan con su inmortal *Cosmos* y su majestuosa *Contacto* en donde se utilizan, por ejemplo, los números primos para enviar mensajes, números en base 11, números trascendentes; J.K. Rowling a lo largo de toda su saga de Harry Potter, por ejemplo en [9, pág. 462] en donde se menciona la posibilidad de dividir el alma en 7 partes ya que "*. . . el siete es el número mágico más poderoso. . .*". Magnus Enzensberger con su *El Diablo de los Números* [3], hasta *La Quinta Montaña* de Paulo Coelho, *Cinco semanas en globo* de Julio Verne, entre muchos otros autores, han utilizado el carácter mágico de los números para hipnotizar y encantar a sus lectores.

En el cine, al que se conoce como el *séptimo arte*, tenemos, solo por citar siete películas: *Siete años en el Tibet*, *Blancanieves y los siete enanos*, *Seven*, *El quinto elemento*, *Siete novias para siete hermanos*, *Los siete samuráis* de Akira Kurosawa y la emblemática película de Bergman, *El séptimo sello* en la que un caballero cruzado reta a la Muerte a una partida de ajedrez, mientras busca respuestas a las preguntas claves de la vida.

La aritmética y la geometría son las dos áreas de la matemática que se desarrollan primero. En general, se puede decir que la *teoría de números* estudia los números enteros y sus propiedades, se desarrolló desde la antigüedad bajo el nombre de aritmética, del griego $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ (*arithmos*), número.

Los enteros positivos constituyen, sin duda alguna, la primera creación matemática del hombre, es realmente difícil imaginar a los seres humanos sin la habilidad de contar, aunque ésta se hallase reducida a estrechos límites. La historia nos dice que ya en los años 5700 a.C., los antiguos sumerios disponían de un calendario, por lo tanto, tuvieron que haber desarrollado alguna forma de aritmética. En los años 2500 a.C. los sumerios desarrollaron un sistema de numeración utilizando 60 como base, éste pasó a los babilonios que desarrollaron una gran habilidad calculadora, la calculería era conocida más bien con el nombre de *logística* por los griegos.

Cuando las antiguas civilizaciones alcanzaron un nivel que les dejaba tiempo libre para reflexionar sobre las cuestiones no cotidianas, algunos pueblos empezaron a especular acerca de la naturaleza y propiedades de los números. Esta curiosidad se desarrolló en un cierto misticismo numérico o *numerología*, y aún hoy números como 3, 7, 11 y 13 se consideran portadores de buena o mala suerte. Los números se utilizaron para fijar los recuerdos, celebraciones, o para realizar transacciones comerciales unos 5000 años antes de que se pensara en estudiarlos en sí mismos de forma sistemática. Son los griegos los que dan la primera orientación científica al estudio de los enteros, más allá de la simple aritmética.

Pitágoras (572 − 497 a.C.), nace en la isla de Samos, Grecia, para algunos, fue el primer matemático puro, se cree que fue discípulo de Tales. Es en esta isla donde funda su primera escuela, luego, huyendo de la tiranía de Polícrates, funda la segunda escuela en Crotona y la tercera en Tarento. Pitágoras y sus discípulos efectuaron un estudio bastante completo de los enteros, pues la filosofía de los pitagóricos se basaba en ellos y los consideraban pilares del conocimiento. Fueron los griegos los primeros en clasificar los enteros en números pares, impares, primos, compuestos, perfectos, amigos, entre otros, véase página 6. Esta escuela aceptaba solamente los números enteros, para ellos, las fracciones no eran números.

Los pitagóricos relacionaron además los números con la geometría, Pitágoras, por ejemplo, demuestra geométricamente muchas proposiciones de la teoría de números, además, introdujeron la idea de números poligonales: triangulares, cuadráticos, pentagonales, entre otros, dependiendo de una disposición geométrica muy particular, véase página 8.

A la escuela pitagórica se le atribuye la demostración del teorema de Pitágoras, resultado conocido, pero no demostrado formalmente, muchos años antes por otros pueblos. Los pitagóricos estudiaron la diferencia de dos números cuadráticos consecutivos $C_{n+1} - C_n$, que llamaron *gnomon*, palabra que significa una escuadra de carpintero. En ocasiones el gnomon es un cuadrado perfecto, por ejemplo $C_5 - C_4 = 3^2$, consideraciones que ayudaron a formular el teorema de Pitágoras.

Los pitagóricos fueron los primeros en proporcionar un método para determinar infinidades de ternas. En notación moderna podemos describirlo como sigue: sea n un número impar mayor que 1, y sean

$$x = n, \qquad y = \frac{n^2 - 1}{2}, \qquad z = \frac{n^2 + 1}{2}$$

La terna que resulta (x, y, z) constituye siempre una terna pitagórica en donde $z = y + 1$. He aquí algunos ejemplos:

x	3	5	7	9	11	13	15	17	19
y	4	12	24	40	60	84	112	144	180
z	5	13	25	41	61	85	113	145	181

Platón (430-349 a.C.) justificó un método para determinar las ternas pitagóricas por las fórmulas $x = 4n$, $y = 4n^2 - 1$, $z = 4n^2 + 1$. Como ejemplo, considere:

x	8	12	16	20
y	15	35	63	99
z	17	37	65	101

en estos, observe que se tiene que $z = y + 2$.

"*Todo es número*" dijo Pitágoras. Con esta frase, de alguna manera, se encierra místicamente la filosofía de que el Universo y todos sus secretos, misterios y milagros están regidos por el número y sus propiedades, el simple hecho que los alfabetos clásicos del latín, griego y hebreo tuviesen equivalentes numéricos, por ejemplo, para el caso del griego, para los otros consulte [15], hace que se desarrolle una seudociencia conocida como *gematría*. En su forma más sencilla, la gematría iguala las palabras con números equivalentes e interpreta los equivalentes verbales. Un ejemplo es la palabra *amén* que según la escritura griega corresponde a lo números 1, 40, 8 y 50, al sumarlos se obtiene 99 y por este motivo el 99 aparece al final de muchos escritos antiguos, plegarias o tumbas.

$\alpha \to 1$	$\varsigma \to 6$	$\kappa \to 20$	$o \to 70$	$\tau \to 300$	$\omega \to 800$
$\beta \to 2$	$\zeta \to 7$	$\lambda \to 30$	$\pi \to 80$	$\upsilon \to 400$	ϡ $\to 900$
$\gamma \to 3$	$\eta \to 8$	$\mu \to 40$	ϙ $\to 90$	$\phi \to 500$	
$\delta \to 4$	$\theta \to 9$	$\nu \to 50$	$\rho \to 100$	$\chi \to 600$	
$\epsilon \to 5$	$\iota \to 10$	$\xi \to 60$	$\sigma \to 200$	$\psi \to 700$	

Cuadro 1: Símbolos del sistema de numeración jónico.

En el libro X de los *Elementos*, Euclides (325-265 a.C.) dio un método para obtener todas las ternas pitagóricas, dado por las fórmulas

$$x = t(a^2 - b^2), \qquad y = 2tab, \qquad z = t(a^2 + b^2)$$

donde t, a, b son enteros positivos arbitrarios tales que $a > b$, a y b carecen de factores primos comunes, y uno de ellos, a ó b, es par y el otro es impar.

Por esta época, el matemático griego Eratóstenes (276-194 a.C.), desarrolló un método para determinar los números primos menores que n, conocido como la *criba*[3] *de Eratóstenes*, aunque su aporte más importante a la ciencia se considera el lograr una aproximación de la circunferencia de la Tierra utilizando las medidas de los ángulos de elevación al Sol.

Además, Euclides hizo una importante contribución al problema de buscar todos los números *perfectos*, véase página 7, planteado por los pitagóricos. En el libro IX, Euclides da la fórmula para todos los números perfectos pares. Demuestra que, un número par es un número perfecto si es de la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$ donde tanto p como $2^p - 1$ son números primos, resultado conocido como *teorema de Euclides*.

Los primeros números perfectos son el 6 y el 28, conocidos desde la Grecia Antigua, y los siguientes son 496 y 8128, descubiertos en el siglo I d.C. por Nicómaco. Si $s(n)$ denota la suma de los divisores propios de n, se tiene que

$$\begin{aligned} s(6) &= 1 + 2 + 3 = 6 \\ s(28) &= 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28 \end{aligned}$$

como $496 = 16 \cdot 31 = 2^4 \cdot 31$, se tiene que

$$s(496) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 31 + 31 \cdot 2 + 31 \cdot 2^2 + 31 \cdot 2^3 + 31 \cdot 2^4 = 496$$

es decir, 496 es perfecto. Al observar la factorización prima de estos tres enteros perfectos, se nota que $6 = 2 \cdot 3$; $28 = 4 \cdot 7$ y $496 = 16 \cdot 31$ y son de la forma $2^p(2^{p+1} - 1)$, donde el último factor es primo.

Para p primo, los números de la forma $M_p = 2^p - 1$, se conocen como los *números de Mersenne*, en caso que M_p sea primo se le llama primo de Mersenne. Se puede demostrar que si $2^n - 1$ es primo, entonces n también lo es, véase [6], además, notemos que el recíproco no es verdadero, pues a pesar que 11 sí es primo, note que $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ es compuesto. Se les llama de esta forma en honor de Martín Mersenne (1588-1648), fraile franciscano que pasó la mayor parte de su vida en los monasterios de París.

[3] Criba es un medio de seleccionar y, en particular, de distinguir lo verdadero o bueno de lo que no lo es. En este caso, es el procedimiento ideado por Eratóstenes para seleccionar los números primos.

Aunque no se ha demostrado, se cree que hay un número infinito de primos de Mersenne, y curiosamente sólo se han encontrado 44 de estos primos, véase [13]. El mayor de estos primos de Mersenne, que además corresponde con el mayor número primo conocido, es

$$M_{32582657} = 2^{32582657} - 1$$

un número de 9808358 dígitos, descubierto en septiembre de 2006 por el Dr. Curtis Cooper y el Dr. Steven Boone, profesores de Central Missouri State University. Véase [13].

Es fácil probar que si $2^p - 1$ es primo, entonces el número $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ es perfecto, véase [6], Euclides fue el primero en probarlo, en el siglo IV a.C, y dos mil años más tarde, Euler demostró el recíproco del teorema de Euclides, esto es, cada número perfecto par debe ser del tipo descrito por Euclides, por ejemplo $8128 = 2^6(2^7 - 1)$.

Los números perfectos son, realmente, muy raros, los cinco primeros números perfectos pares son 6, 28, 496, 81128 y 33550336. En el momento actual sólo se conocen 44 números perfectos, véase [13]. La historia de los números de Mersenne y números perfectos está estrechamente relacionada con el desarrollo de la informática, para verificar este hecho, puede consultar el dominio [13].

La lista de números primos menores que 100 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Una tabla que daba la lista de todos los números primos menores que 10 millones, que son 664579 números, fue publicada en 1914 por el matemático estadounidense D. N. Lehmer.

Un estudio detallado de la tabla de números primos pone de manifiesto que se encuentran distribuidos de manera bastante irregular. La distribución muestra grandes espacios entre primos, por ejemplo, el primo 370261 va seguido de 111 números compuestos y no existe primo alguno entre 20231323 y 20831533. Es fácil demostrar que entre números primos se pueden presentar espacios arbitrariamente grandes, véase [6].

Por otro lado, existen algunos números pares consecutivos que son primos, es decir, que difieren solo en 2 unidades, estos se conocen como primos *gemelos*. Hay unos 1000 pares gemelos menores que 100000 y unos 8000 menores que 1000000. Muchos matemáticos creen que existe una cantidad infinita de estos pares, pero ninguno ha sido capaz de demostrarlo. Por ahora, los primos gemelos más grandes conocidos son

$$33218925 \cdot 2169690 \pm 1$$

fueron descubiertos en el año 2002 y cada número tiene 51090 dígitos.

Uno de los problemas más famosos relativos a primos lo constituye la llamada *conjetura de Goldbach*, propuesta por Christian Goldbach en una carta que envió a Leonhard Euler en el año 1742, en ésta se afirma que todo número entero, par, mayor o igual que 4 se puede escribir como la suma de dos primos. Al día de hoy no se ha podido demostrar su validez, pero tampoco se ha encontrado algún par que no sea la suma de dos primos. Solamente se ha podido comprobar su validez para una gran cantidad de números, por ejemplo,

$$6 = 3 + 3, \quad 10 = 7 + 3, \quad 50 = 43 + 7, \quad 100 = 89 + 11$$

Otra conjetura nos dice que existe una infinidad de números primos capicúas, por ejemplo, 2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929, 10301, ..., note que en esta lista no existen números de 4 dígitos, véase [6]. Algunos datos curiosos sobre números capicúas: el único número asimétrico que produce un capicúa cuando se eleva al cubo es 2201 y este cubo es 10662526601; en 1980 Harry Nelson demostró que el primo capicúa más pequeño que contiene los diez dígitos es 1023456987896543201.

La forma en que se hace el tratamiento de los enteros en general, está quizá mejor ejemplificada por una historia contada por el matemático británico Hardy. Se trata de un joven discípulo suyo, un hindú llamado Srinivasa Ramanujan (1887-1920), que tuvo una notable intuición aritmética y a pesar de no contar con una formación matemática rigurosa, produjo gran cantidad de trabajos de investigación originales. Padecía de tuberculosis y su muerte a la edad de 23 años era inevitable. En el lecho de muerte Hardy lo fue a visitar, cuando llegó le mencionó que el taxi en el cual hizo el viaje tenía 1729 como número de licencia, y le parecía quizás un número sin interés. Ramanujan replicó inmediatamente que, por el contrario, 1729 era particularmente interesante ya que es el entero positivo más pequeño que se puede expresar como una suma de dos cubos positivos en dos formas diferentes:

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$$

No debe inferirse la necesidad de conocer todos esos pequeños hechos para entender la teoría de números o, que se necesite ser un calculador relámpago, simplemente se desea puntualizar que este aspecto señalado involucra un número entero, pero tiene un elemento adicional que de alguna manera lo hace más significativo: analizar una propiedad de dicho entero. Esto, sin duda, es lo que distingue a la teoría de números de la simple aritmética.

Respecto de la incertidumbre y de lo misterioso que puede resultar esta rama de la matemática, Wacław Sierpiński, célebre matemático polaco (1882-1969), dijo: "*El progreso de nuestro conocimiento de los números avanza no sólo por lo que de ellos ya conocemos, sino también porque nos damos cuenta de lo que todavía de ellos desconocemos*", palabras que, para los que sentimos pasión por los números y nos ha hechizado su encanto como canto de sirena, resultan ser proféticas.

Debemos comprender que somos una generación que desciende, aplica y renueva los conocimientos que generaron los *Gigantes* de la Matemática. Debemos comprender que somos trasmisores y generadores de conocimiento y, en la medida que logremos asimilarlos, sin duda alguna, estaremos en mayor capacidad de trasmitirlos. Newton escribió que "*puedo mirar más lejos que otros, porque estoy sentado sobre hombros de Gigantes*", reafirmando que el conocimiento que él generó se hizo posible gracias a que hubo varias generaciones anteriores que se lo permitieron.

Existen centenares de problemas no resueltos en teoría de números y aparecen otros problemas más rápidamente de lo que se resuelven los antiguos. Sin duda, a las personas que se adentran en el estudio de los números los invadirá la curiosidad por algunas de sus propiedades, y sentirán la alegría del descubrimiento recompensada por la elegancia y lo inesperado de muchos de los resultados.

Números especiales

A continuación se presenta un resumen de algunos números que satisfacen una propiedad o definición particular, cuya definición es útil conocer.

Se dice que un número natural n, $n \geq 2$, es un número **primo** si los únicos divisores de n son 1 y n. Si no es primo, se llama número **compuesto**. Además, dos enteros n y m, son **primos relativos**, **primos entre si** o **coprimos** si $\text{mcd}(n, m) = 1$.

Ejemplo 1. *El número* 13 *es primo,* 14 *es compuesto pues* $14 = 2 \cdot 7$. *Como además se cumple que* $\text{mcd}(13, 14) = 1$, *se tiene que* 13 *y* 14 *son primos relativos.* ■

Los números enteros x, y, z, se llaman **pitagóricos** si satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Es decir, (x, y, z), será una tripleta pitagórica si los tres números corresponden a las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

Ejemplo 2. *Las tripletas* $(3, 4, 5)$ *y* $(7, 24, 25)$ *son pitagóricas.* ■

Es fácil probar que, para cada dos enteros n y m, los valores de x, y, z definidos por:

$$x = n^2 - m^2, \qquad z = n^2 + m^2, \qquad y = 2mn \tag{0.1}$$

son números pitagóricos. Se puede probar que para toda (x, y, z) solución, donde son primos relativos dos a dos, existen n y m que satisfacen la relación anterior. En la siguiente tabla se observan varias tripletas pitagóricas para algunos valores de n y de m, con $n > m$:

n	m	x	y	z
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	2	12	16	20
6	5	11	60	61
7	5	24	70	74
13	11	13920	40898	43202

Por supuesto que toda tripleta que sea múltiplo de $(3, 4, 5)$, será una solución de la ecuación, sin embargo, no toda solución de la ecuación es múltiplo de $(3, 4, 5)$. Aún más, en cada tripleta de números pitagóricos, siempre hay uno que es divisible por 3, uno que es divisible por 4 y uno que es divisible por 5.

Ejemplo 3. *La tripleta* $(5, 12, 13)$ *es pitagórica, pues* $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$. *Note que* 12 *es divisible por* 3 *y por* 4 *y* 5 *es divisible por* 5. ■

El número natural n se le llama **perfecto** si la suma de todos sus divisores positivos, menores que n, da como resultado n. Si dicha suma es menor que n se llama número **deficiente** y si dicha suma es mayor que n será **abundante**.

Ejemplo 4. *Como* $6 = 1 + 2 + 3$, *se tiene que* 6 *es perfecto. Como* $1 + 2 + 4 = 7$ *y* $7 < 8$, *se tiene que* 8 *es un úmero deficiente. Por último,* $1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21$ *y* $21 > 18$, *por lo tanto* 18 *es un número abundante.* ■

Los antiguos griegos se referían a los divisores propios de un número llamándolos sus *partes*. Los números 6 y 28 los llamaron perfectos porque eran iguales a la suma de sus partes.

Se dice que dos números primos p y q, son **primos gemelos** si $|p - q| = 2$.

factorización de m	m	n	factorización de n
$2^2 \cdot 5 \cdot 11$	220	284	$2^2 \cdot 71$
$2^2 \cdot 5 \cdot 251$	5020	5564	$2^2 \cdot 13 \cdot 107$
$2^3 \cdot 17 \cdot 79$	10744	10856	$2^3 \cdot 23 \cdot 59$
$3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71$	67095	71145	$3^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31$
$2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 1187$	308620	389924	$2^2 \cdot 43 \cdot 2267$
$3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 59$	947835	1125765	$3^3 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 269$

Cuadro 2: Algunas parejas de números amigos.

Ejemplo 5. *Los números* 11 *y* 13 *son primos gemelos, al igual que* 41 *y* 43. ■

Se dice que un número natural n, es un número **sin cuadrados** si para todo primo p, p^2 no divide a n, es decir, si los exponentes de los primos en la descomposición en factores primos de n, no exceden la unidad.

Ejemplo 6. 42 *es un número sin cuadrados, pues* $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. ■

Se dice que un número natural n, es un **cuadrado perfecto** si $\exists k$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $n = k^2$. Será un **cubo perfecto** si $\exists k$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $n = k^3$.

Ejemplo 7. *Los números* 25 *y* 121 *son cuadrados perfectos pues se cumple que* $25 = 5^2$ *y* $121 = 11^2$, *además, los números* 27 *y* 125 *son cubos perfectos ya que* $27 = 3^3$ *y* $125 = 5^3$.

Si $s(n)$ se define como la suma de todos los divisores positivos y propios de n. Se dice que los números naturales m y n, son **amigos** si

$$s(n) = m, \qquad s(m) = n$$

Es decir, la suma de los divisores propios de cada uno es el otro número.

Ejemplo 8. *Los números* 220 *y* 284 *son amigos pues*

$$s(220) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

y además, se tiene que $s(284) = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$. ■

Algunos pares de números amigos se pueden ver en el cuadro 2. Las parejas 17296, 18416 y 9363584, 9437056 fueron descubiertos en el siglo IX d.C. por el matemático árabe Tabit ibn Qurra (826-901), que encontró la fórmula: si $n > 1$ y p, q y r son primos de la forma $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ y $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$, entonces $2^n pq$ y $2^n r$ son amigos.

El número entero positivo n se llama **poligonal** si es posible representarlo por medio de puntos colocados en forma poligonal, de manera que se construyan polígonos encajados con igual número de puntos en cada lado del polígono. Dependiendo del polígono inicial, se hablará de números triangulares, cuadráticos, pentagonales, hexagonales y así sucesivamente.

La razón de esta nomenclatura geométrica, se aclara cuando los números se representan por medio de puntos colocados en forma de triángulos, cuadrados, pentágonos, etc., tal como se ilustra en la figura 0.1 para triangulares, en la figura 0.2 para cuadráticos y en la figura 0.3 para pentagonales.

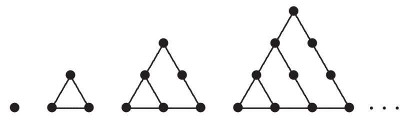

Figura 0.1: Números triangulares 1, 3, 6, 10, 15,...

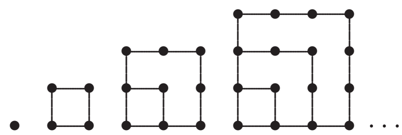

Figura 0.2: Números cuadráticos 1, 4, 9, 16, 25,...

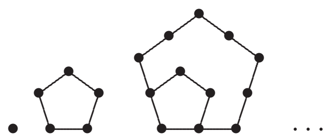

Figura 0.3: Números pentagonales 1, 5, 12, 22, 35,...

Se dice que un número natural n es **sensato**, si existe alguna base entera b, con $1 < b < n-1$, tal que la representación en esta base tiene todos sus dígitos iguales.

Ejemplo 9. *El número* 62 *es sensato pues* $62 = (222)_5$. ■

Se dice que un número natural n, de tres dígitos, es **tricúbico** si n es igual a las suma de los cubos de sus dígitos.

Ejemplo 10. *El número* 371 *es tricúbico pues* $3^3 + 7^3 + 1^3 = 27 + 343 + 1 = 371$. ■

Se dice que un número natural n, es un número **capicúa** si se lee de igual forma de derecha a izquierda o de izquierda a derecha.

Ejemplo 11. *El número* 1456541 *es capicúa.* ■

Las oraciones o escritos que satisfacen la misma propiedad de los números capicúas se les conoce como **palíndromos**, por ejemplo, las palabras *"reconocer"* o *"sometemos"*, o las oraciones *"amor a Roma"* y *"dábale arroz a la zorra el abad"* son palíndromos ya que si se leen de derecha a izquierda como de izquierda a derecha, resulta ser la misma oración.

Se dice que el número natural c, de n dígitos, es **cíclico** si al multiplicar c por un múltiplo menor o igual que n, el producto tiene los mismos dígitos siguiendo un orden cíclico.

Ejemplo 12. *El número* $c = 142857$ *es cíclico, pues se verifica que* $2c = 285714$, $3c = 428571$, $4c = 571428$, *de la misma manera se calcula* $5c = 714285$ *y* $6c = 857142$. ■

Se sabe que los números cíclicos son el resultado del período de la expresión decimal $\frac{1}{p}$, para algún p primo, por ejemplo, de $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$, se obtiene el número cíclico del ejemplo anterior. Otros cíclicos son generados por $\frac{1}{17}$, véase [6], y otro generado por $\frac{1}{17389}$.

Se dice que el número natural n, es **bueno** si n se puede escribir como una suma de números naturales, distintos o no, de manera que la suma de sus inversos es 1. Si n no es bueno, se llamará número **malo**.

Ejemplo 13. *Se tiene que* 11 *es bueno, pues* $11 = 2 + 3 + 6$ *y además* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. ■

Los números de la forma $2^{2^n} + 1$ se les conoce como los **números de Fermat**.

Fermat creía que para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, la fórmula $F_n = 2^{2^n} + 1$, daría siempre un primo, los cinco primeros son $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$, y todos ellos son primos. Sin embargo, en 1732, Euler halló que F_5 es compuesto demostrando que $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6700417$. Más allá de F_5, no se han hallado otros primos de Fermat.

Un primo p se llama **primo de Germain** si $2p + 1$ es primo.

Ejemplo 14. *Es claro que* 2 *es primo de Germain pues* 5 *es primo;* 3 *también lo es pues* 7 *es primo, pero* 13 *no es primo de Germain pues* 27 *no es primo. El mayor primo de Germain conocido hasta ahora es*

$$p = 2687145 \cdot 3003 \cdot 10^{5072} - 1$$

encontrado en octubre de 1995 *por Dubner.* ■

La sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., que define el término n-ésimo como la suma de los dos términos anteriores, es decir, se cumple que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ con condiciones iniciales $F_1 = F_2 = 1$, se conoce como la *sucesión de Fibonacci* y los números que conforman esta sucesión se conocen como **números de Fibonacci**. Véase [6].

Para p primo, los números de la forma $M_p = 2^p - 1$ se conoce como los **números de Mersenne**, en caso que M_p sea primo se le llama **primo de Mersenne**. Para mayores detalles puede consultar [13].

Ejemplo 15. *Los primeros cinco primos de Mersenne son* M_p *para* 2, 3, 5, 7, 13. ■

Bibliografía

[1] Asimov, Isaac. *Año bisiesto*. En La Nación, página 6-C, 28 de febrero de 1988.

[2] Asimov, Isaac. *El reino de los números*. Ed. Diana, España, 1969.

[3] Enzensberger, Hans Magnus. *El Diablo de los Números*. Ediciones Siruela, España, 1980.

[4] Gardner, Martin. *Circo Matemático*, Alianza Ed., Madrid, 1985.

[5] Masini, Giancarlo. *El Romance de los Números*. España, 1980.

[6] Murillo T. Manuel & Gónzalez A, José Fabio. *Teoría de los números*, Editorial Tecnológica, Costa Rica, 2006.

[7] Pappas, Theoni. *El Encanto de la Matemática*. Ediciones Zugarto S.A. España, 1996.

[8] Perero, Mariano. *Historia e Historias de Matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994.

[9] Rowling, J.K. *Harry Potter: el misterio del príncipe*. Editorial Salamandra, España, 2006.

[10] Ruiz, Ángel. *Historia y Filosofía de las Matemáticas*, Editorial de la Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica, 2003. Disponible en www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/

[11] Tahan, Malba (Seudónimo). *El hombre que calculaba*. Editorial Crear. Venezuela, 1985.

[12] www.wikipedia.com

[13] www.mersenne.org

[14] www.vatican.va/archive/

[15] www.kolumbus.fi/gematria/spaingematria.htm