TRIGONOMETRÍA UTILIZANDO COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA CALCULADORA GRAFICADORA CON *CAS*

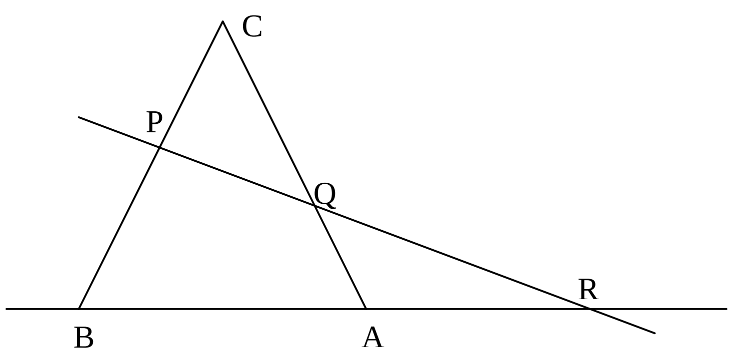
Edison De Faria Campos[1]

Resumen
En este curso desarrollaremos algunos contenidos de la trigonometría con el soporte de la calculadora graficadora con CAS voyage 200. También daremos una reseña histórica del nacimiento y evolución de la trigonometría, deduciremos algunas identidades trigonométricas y relacionaremos las relaciones trigonométricas con sus respectivas gráficas.

Introducción

La historia de la trigonometría empieza en Egipto y Babilonia (Maor, 1998; O´Connor & Robertson). Los Babilónicos establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. En el segundo siglo AC el matemático y astrónomo griego Hipparchus compiló una tabla trigonométrica para resolver triángulos, alrededor del año 140 A.C. Dicha tabla proporcionaba la longitud de la cuerda subtendida por un ángulo en un círculo de radio r y es equivalente a la tabla de seno. Aunque estas tablas no han sobrevivido, se conoce que Hipparchus escribió doce libros de tablas de cuerdas, lo que lo hace fundador de trigonometría.

El siguiente matemático griego en producir una tabla de cuerdas fue Menelaus, aproximadamente 100 AD. Menelaus trabajó en Roma y escribió seis libros de tablas de cuerdas que se perdieron, pero su trabajo sobre esféricas ha sobrevivido y es el primer trabajo conocido sobre trigonometría esférica. Menelaus demostró una propiedad de triángulos planos y la correspondiente propiedad de triángulo esférico conocida como el *regula sex quantitatum*.



[1] Asociación de Matemática Educativa, ASOMED. Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, CIMM. Correo-e: edefaria@cariari.ucr.ac.cr

Teorema de Menelau:
Si una recta encuentra los lados BC, AC y AB de un triángulo en los puntos P, Q y R entonces el producto de las razones $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB}$ es igual a -1.

300 años más tarde el astrónomo Ptolomeo produjo una tabla de cuerdas y utilizó $r = 60$ debido a que los griegos helenísticos habían adoptado el sistema numérico Babilónico en base 60 (hexadecimal).

Hipparchus (190-120 AC)

Ptolomeu (85-165)

Ptolomeo, junto con los escritores anteriores, utilizó una forma de la relación $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, aunque – por supuesto – no utilizaron sen ni cosCon los autores más tempranos, usó una forma de la relación juntos, aunque por supuesto no usaron senos y los cosenos, sino cuerdas. Análogamente Ptolomeo conocía las fórmulas en término de cuerdas:

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Inicialmente, Ptolomeo calculó cuerdas inscribiendo polígonos regulares de lados 3, 4, 5 y 6 en un círculo, lo que le permitió calcular cuerdas subtendidas por ángulos de 36°, 72°, 60°, 90° y 120°. Posteriormente él encontró un método para encontrar la cuerda subtendida por un arco mitad de una cuerda conocida. Esto junto con interpolación hizo posible calcular cuerdas con un alto grado de precisión. En su obra Almagest, Ptolomeo proporcionó una tabla de cuerdas de 0^0 a 180^0 con variaciones de 1^0, con una exactitud de $1/3600$ de una unidad. En el libro él dio muchos ejemplos del uso de la tabla para encontrar partes desconocidas de triángulos a partir de ciertos elementos conocidos.

Posiblemente, al mismo tiempo de Euclides, los astrónomos de India habían desarrollado un sistema trigonométrico basado en la función seno en lugar de la función cuerda utilizada por los Griegos. Esta función seno era la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa fija en lugar de ser la razón entre el lado opuesto y la hipotenusa como se conoce hoy.

En el siglo octavo los astrónomos musulmanes heredaron las tradiciones griegas y indias dando preferencia por la función seno. Al final del siglo décimo ellos habían completado las otras cinco funciones trigonométricas, descubrieron y demostraron varios teoremas básicos de la trigonometría para triángulos planos y esféricos. Todos estos descubrimientos fueron aplicados en la astronomía y para que los musulmanes pudieran encontrar la dirección de la Meca para hacer sus cinco oraciones diarias. Las tablas para seno y tangente con variaciones de 1/60 de un grado fueron exactas con un error menor que una parte en 700 millones.

La primera obra occidental sobre trigonometría de gran importancia fue escrita por el matemático y astrónomo alemán Johann Müller, conocido como Regiomontanus. Su obra De triangulis omnimodis, escrita en 1533, contenía trabajos sobre trigonometría plana y esférica desarrollados cerca de 1464. Posteriormente, el astrónomo alemán Georges Joachim, conocido como Rheticus, publicó en 1542 las secciones trigonométricas del libro de Copernico, *De Revolutionibus*, proporcionando fórmulas importantes para la astronomía de la época e introdujo la concepción moderna de funciones trigonométricas como razones en lugar de longitudes de segmentos. También escribió tablas de senos y cosenos – aunque no las nombró así - que fueron publicadas después de su muerte. Estas fueron las primeras tablas de cosenos publicadas.

El matemático francés François Viète introdujo el triángulo polar en trigonometría esférica, y estableció fórmulas para $\operatorname{sen}(n\theta)$ y $\cos(n\theta)$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

Regiomontanus (1436-1476) François Viète (1540-1603)

La primera persona en utilizar la notación sin para seno fue Edmund Gunter en 1624, mientras que el matemático francés Hérigone fue el primero en usar sin en un libro publicado en 1634. La segunda función trigonométrica más importante no era conocida como coseno, su nombre era seno versed, versin, que se relaciona con la hoy conocida como coseno mediante la relación $\operatorname{ver}\sin x = 1 - \cos x$, seno girado de 90^0. El nombre tangente fue utilizado por primer vez por Thomas Fincke en 1583 y el de cotangente por Edmund Gunter en 1620.

La secante y la cosecante no fueron usadas por los primeros astrónomos. Ellas fueron reconocidos por sus propiedades cuando navegantes del siglo XV empezaron a preparar tablas. Copernicus oía hablar de la secante que él llamó hipotenusa. Viète conocía las relaciones:

$$\frac{\text{cosec x}}{\text{sec x}} = \text{cot x} = \frac{1}{\text{tan x}}$$

$$\frac{1}{\text{cosec x}} = \frac{\text{cos x}}{\text{cot x}} = \text{sen x}$$

El término “trigonometría” surgió por primera vez como el título del libro *Trigonometría* escrito por B. Pitiscus y publicado en 1595.

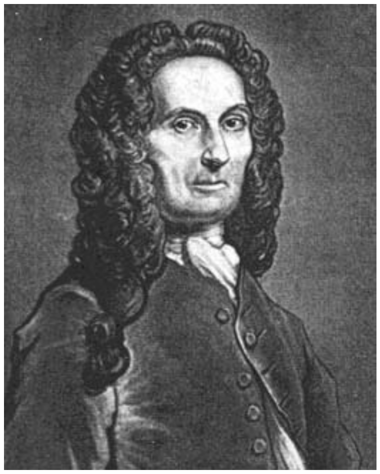
Los cálculos trigonométricos fueron simplificados con la creación de los logaritmos por el matemático escocés John Napier a comienzos del siglo XVII. Cerca de medio siglo después de la publicación de los logaritmos de Napier, Isaac Newton inventó el cálculo diferencial e integral y logró representar $\operatorname{sen} x, \cos x, \tan x$ como series de potencias de x.

En el siglo XVIII el matemático suizo Leonhard Euler definió las funciones trigonométricas en términos de números complejos y mostró que las leyes básicas de la trigonometría eran consecuencia de la aritmética de estos números. Abraham DeMoivre había incursionado en este campo y es conocido por su fórmula publicada en 1722

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)$$

mientras que Euler en 1748 relacionó la base para la exponencial con i y las funciones trigonométricas seno y coseno:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

DeMoivre (1667-1754) Leonard Euler (1707-1783)

Johann Bernoulli encontró la relación entre $\operatorname{sen}^{-1} z$ y $\log z$ en 1702 mientras que Cotes mostró en un artículo publicado después de su muerte en 1722 que $ix = \log(\cos x + i \operatorname{sen} x)$, lo que es equivalente a la fórmula que Euler demostró posteriormente.

Las funciones trigonométricas hiperbólicas, $\operatorname{senh}, \cosh, \tanh$ etc. fueron introducidas por Lambert.

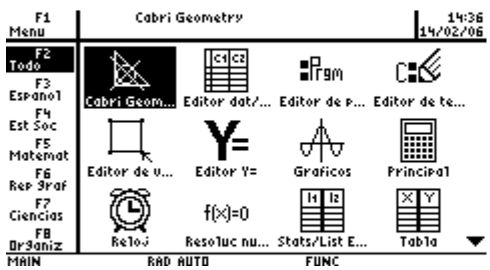
Johann Bernoulli (1667-1748) Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

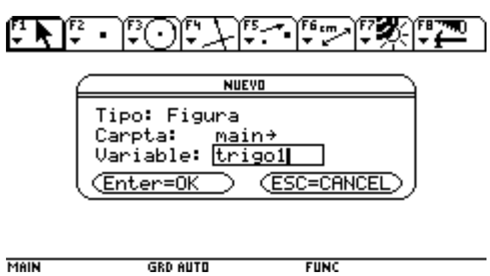
Funciones trigonométricas

Utilizaremos la aplicación Cabri Geometry para definir las funciones trigonométricas en un círculo unitario. El círculo unitario permite conectar los aspectos algebraicos de la trigonometría con los geométricos de forma sencilla y elegante. En esta actividad exploraremos y construiremos relaciones trigonométricas y haremos conexiones con la trigonometría analítica.

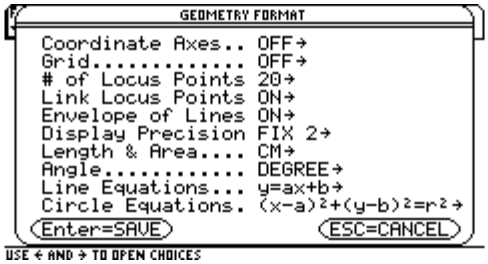
Actividad 1: El círculo unitario
Objetivo: Utilizar la aplicación Cabri Geometry para representar las relaciones trigonométricas.

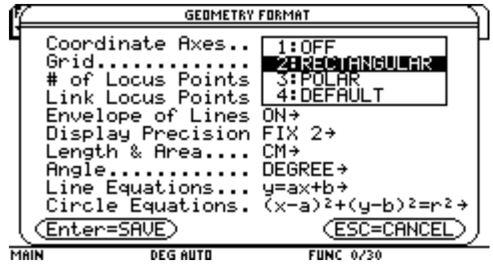
1. Presione la tecla O y seleccione la aplicación Cabri Geometry. Presione ÷. Escoja la opción Nuevo, presione ÷ y escriba *trigo1* en el campo variable. Este será el nombre del archivo de trabajo y será guardado en el directorio Main con la extensión fig.



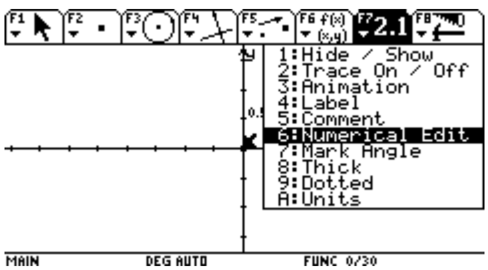


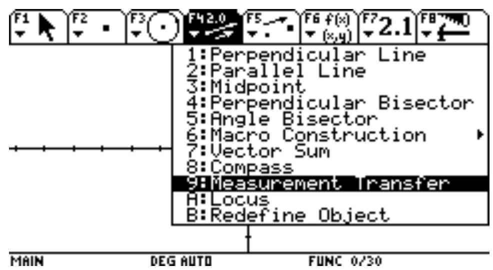
2. Presione 9: Format o bien la tecla verde ∞ seguida de la tecla F, es decir, la combinación de teclas ∞ F. Seleccione RECTANGULAR para los ejes coordenadas. Presione dos veces la tecla ÷.

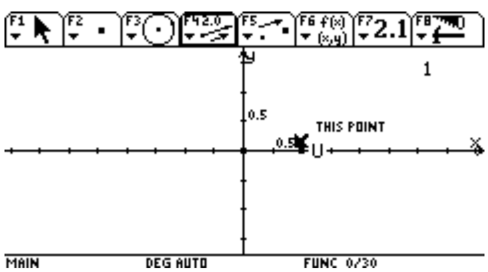


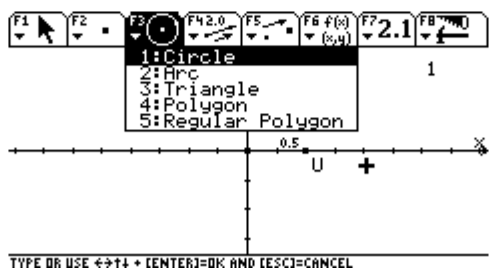


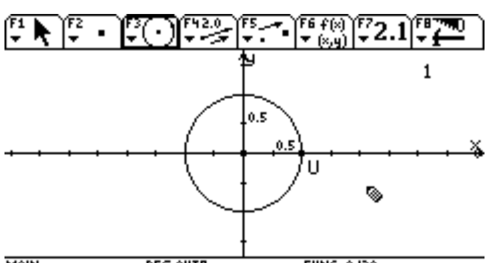
3. Seleccione 6: Numerical Edit ubique el cursor en cualquier lugar de la pantalla, presione ÷ y digite el número 1. Enseguida utilice la herramienta de transferencia de medida, 9: Measurement Transfer, apunte al número 1 presione ÷ posteriormente al eje x, presione ÷. Este paso producirá un punto sobre el eje x a una unidad de distancia del origen. Mueva el cursor sobre el punto generado y cuando aparezca el mensaje *this point* digite la letra U. Con la herramienta Círculo, 1:Circle, construya una circunferencia centrada en el origen y pasando por el punto U. Esta construcción garantiza que el círculo generado es unitario.





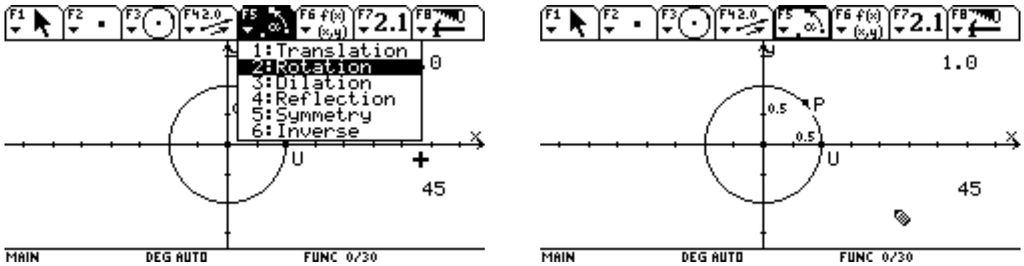




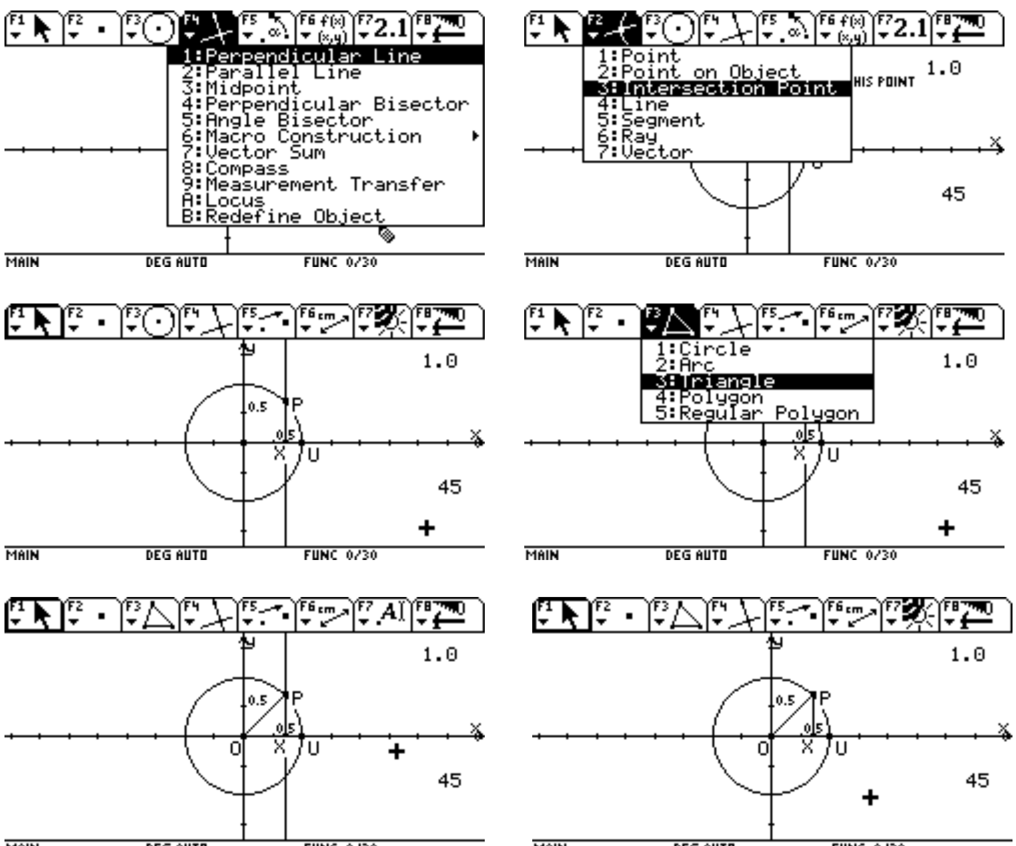


4. Como trabajaremos en grados, si la medida angular en la línea de estado no es DEG, utilice 9: Format o bien las teclas de atajo ∞ F, seleccione DEGREE para ángulo y FIX 5 para Display Precision. Digite el número 45 en la pantalla con la

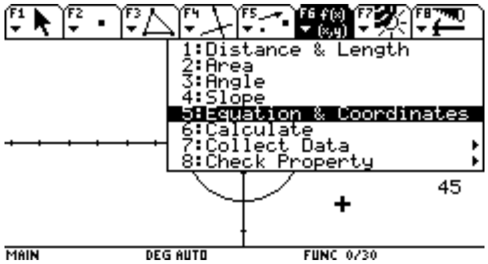
herramienta editor numérico, 6: Numerical Edit. Utilice la herramienta rotación, 2: Rotation, apunte al punto etiquetado por U, el origen del sistema de coordenadas y el número 45. Escriba la etiqueta P para el nuevo punto.

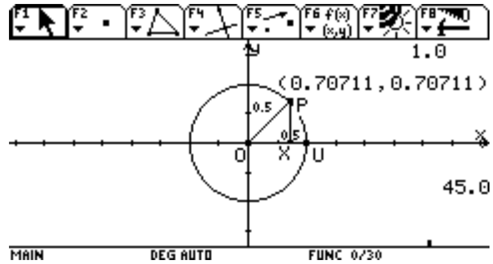


5. Construya una perpendicular al eje x pasando por P (1, apunte al eje x, después al punto P). Sea X el punto dónde esta perpendicular corta el eje x (3, apunte al punto P y al eje x, escriba X). Construya el triángulo OXP usando la herramienta triángulo (3, origen, P y X). Use 4 para etiquetar el origen con la letra O. Oculte la recta perpendicular por X, P con 1: Hide/Show, apunte a la recta, presione ÷ y después N.

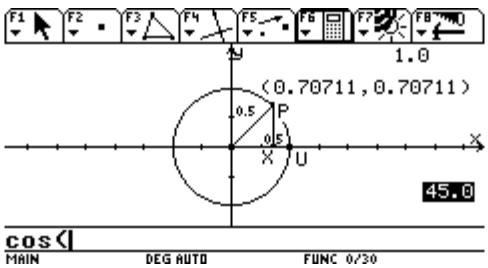


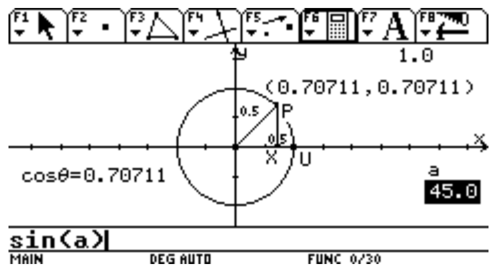
6. Exhiba las coordenadas del punto P utilizando la herramienta Ecuación y Coordenadas,



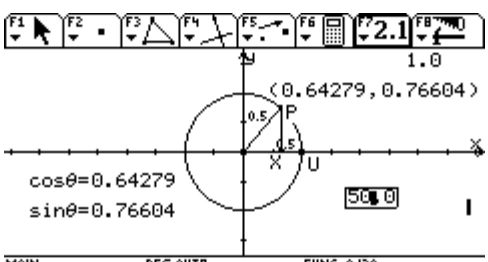


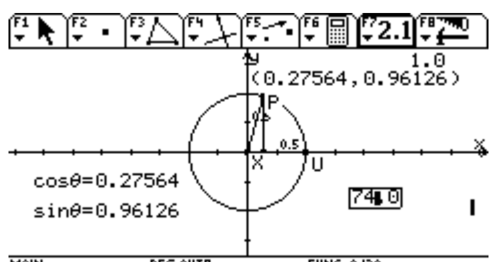
7. Utilice la herramienta de cálculo, 6: Calculate, Ξ señale el número 45 presione ÷, cierre paréntesis y vuelva a presionar ÷. Así podemos calcular el coseno de 45^0. Repita el procedimiento para calcular el seno de 45^0.

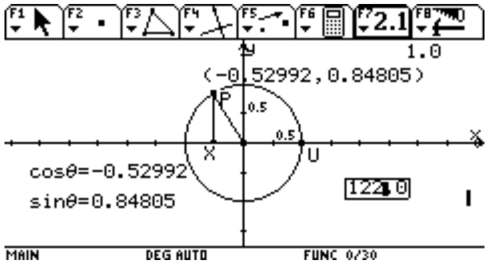


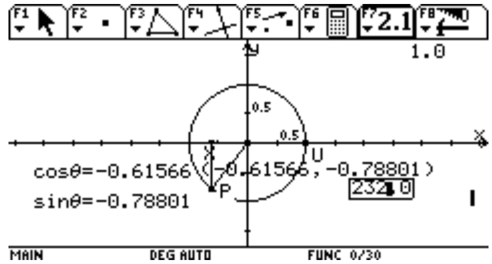


8. Cambie la posición del punto P. Presione 1: Pointer, señale el número 45, presione dos veces ÷, utilice la combinación de teclas ∞ A, para seleccionar el cursor a la izquierda del punto decimal. La combinación ∞ X aumenta el ángulo mientras que ∞ Δ lo disminuye. Compare las nuevas coordenadas de P con los valores calculados de $\cos\theta, \sin\theta$. Observe los patrones y haga conjeturas.



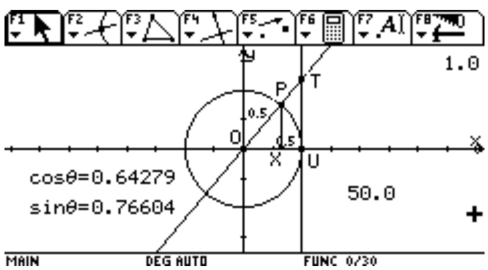


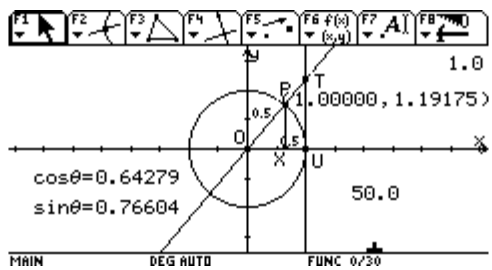




¿Qué relación existe entre $\frac{OX}{OP} = OX$ con $\cos\theta$? ¿ $\frac{XP}{OP} = XP$ con $\sin\theta$? ¿La abscisa de P con $\cos\theta$? ¿La ordenada de P con $\sin\theta$?

9. Construya una perpendicular al eje x pasando por U. Sea T el punto de intersección de la perpendicular con la recta que pasa por O y P (la recta por O y P se construye con □4: Line, señalando O y después P). Con □5 determine las coordenadas de T.





Utilizando semejanza de triángulos, $\triangle OXP$ y $\triangle OUT$ tenemos: $\frac{UT}{OU} = \frac{XP}{OX} = UT$.

Por los resultados conjeturados anteriormente ¿cómo podemos expresar UT?

Calcule la tangente del ángulo θ correspondiente al número editado y compare el resultado con la ordenada del punto T. Cambie el número editado y conjeture si existe relación entre UT y $\tan\theta$.

La semejanza entre los dos triángulos también proporciona la relación:

$\frac{OT}{OP} = OT = \frac{OU}{OX} = \frac{1}{OX}$. ¿Cuál es la relación entre OT con $\cos\theta, \sin\theta$? ¿Entre la ordenada de T con $\cos\theta, \sin\theta$?

Si utilizamos el teorema de Pitágoras en el $\triangle OXP$ obtendremos la siguiente identidad:

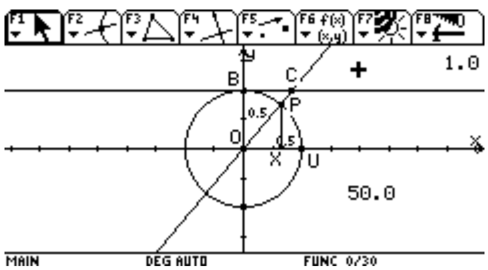
$$OX^2 + XP^2 = OP^2 = 1$$

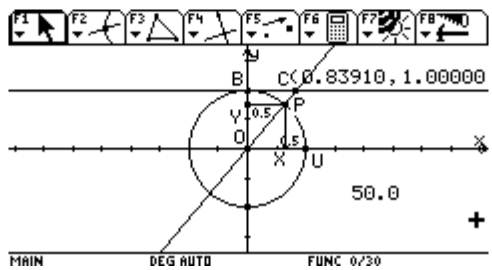
Análogamente, en el $\triangle OUT$:

$$OT^2 = OU^2 + UT^2 = 1 + UT^2$$

Escriba las identidades anteriores en términos de $\cos\theta, \sin\theta, \tan\theta$, etc.

10. Oculte la recta vertical que pasa por U y T, las coordenadas de T, la etiqueta T y los valores de coseno y seno con □ 1. Construya la recta perpendicular al eje y por el punto B de intersección del eje y positivo con la circunferencia unitaria. Sea C el punto de intersección de esta recta con la recta que pasa por O y P. Determine las coordenadas de C. Construya la recta perpendicular al eje y pasando por P, Y el punto de intersección de esta recta con el eje y. Finalmente ocultemos esta recta y construyamos el triángulo OYP.





Utilizando semejanza de triángulos, $\triangle OYP$ y $\triangle OBC$ tenemos: $\dfrac{BC}{OB} = \dfrac{YP}{OY} = \dfrac{OX}{XP} = BC$.

Por los resultados conjeturados anteriormente ¿cómo podemos expresar BC?

Calcule la cotangente del ángulo θ correspondiente al número editado y compare el resultado con la abscisa del punto C. Cambie el número editado y conjeture si existe relación entre BC y $\cot\theta$.

La semejanza entre los dos triángulos también proporciona la relación:

$\dfrac{OC}{OP} = OC = \dfrac{OB}{OY} = \dfrac{1}{XP}$. ¿Cuál es la relación entre OC con $\cos\theta, \sin\theta$? ¿Entre la abscisa de C con $\cos\theta, \sin\theta$?

Si utilizamos el teorema de Pitágoras en el $\triangle OBC$ obtendremos la siguiente identidad:

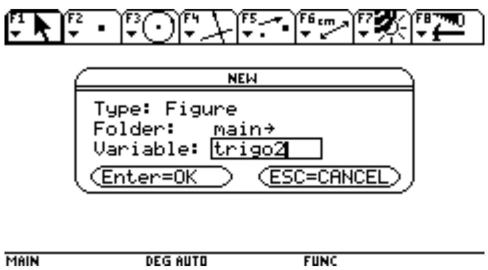
$$OC^2 = OB^2 + BC^2 = 1 + BC^2$$

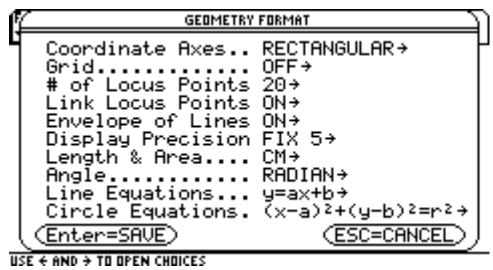
Escriba las identidades anteriores en términos de $\cos\theta, \sin\theta, \tan\theta$, etc.

Esta exploración nos lleva a las definiciones de las seis relaciones trigonométricas, representadas geométricamente sobre el círculo unitario. El teorema de Pitágoras nos lleva a obtener identidades trigonométricas.

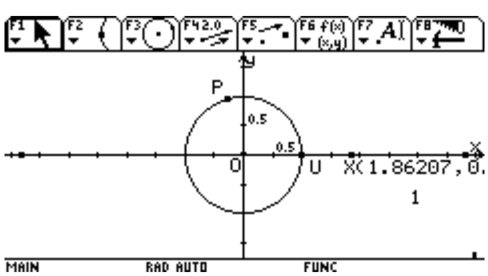
Actividad 2: El círculo unitario revisitado
Objetivo: Utilizar la aplicación Cabri Geometry para construir las gráficas las relaciones trigonométricas.

1. Inicializar un nuevo archivo *fig2*. Seleccione RECTANGULAR para ejes coordenadas, RADIAN para ángulo y FIX 5 para precisión en los cálculos.

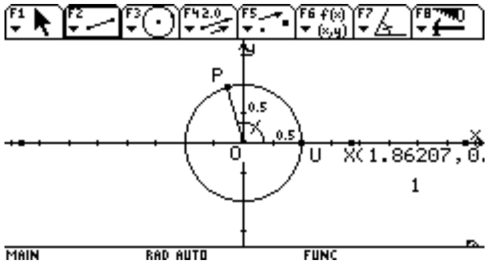


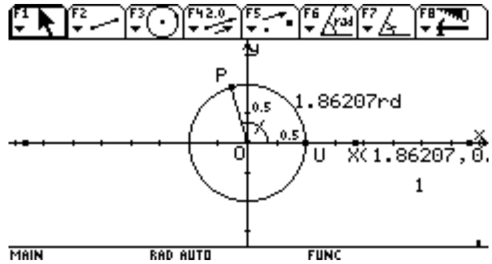


2. Seleccione 6: Numerical Edit ubique el cursor en cualquier lugar de la pantalla, presione ÷ y digite el número 1. Con 9: Measurement Transfer, transfiera este número al eje x. Ponga la etiqueta U sobre este punto. Con la herramienta Círculo, 1:Circle, construya una circunferencia centrada en el origen y pasando por el punto U.
3. Construya un segmento sobre el eje x (con 5) para limitar el dominio de las funciones y construya un punto X sobre este segmento (con 2). Muestre las coordenadas de X. Utilice la herramienta transferencia de medida, 9, y transfiera la abscisa del punto X sobre la circunferencia unitaria a partir del punto U. Etiquete el punto generado con P y el origen con O.



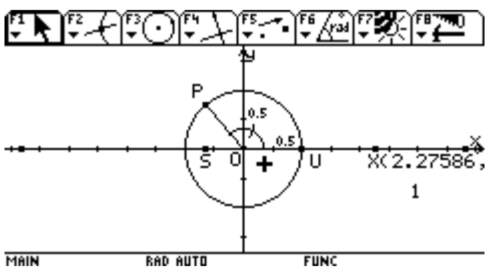
4. Construya el segmento OP y marque el ángulo $\angle UOP$ con □ 7 (apunte a U, O y P respectivamente). Mida el ángulo con □ 3 y apuntando a la marca del ángulo.





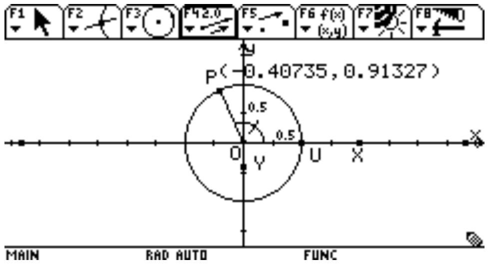
Mueva el punto X para verificar si existe relación entre la abscisa de X y la medida del ángulo UOP.

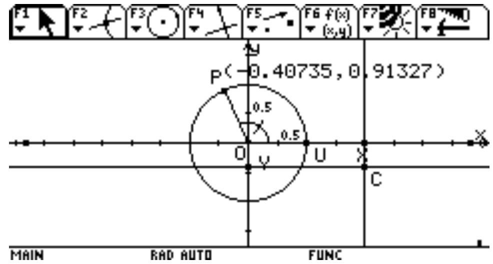
5. Construya la recta perpendicular al segmento sobre el eje x pasando por P. Sea S el punto de intersección de esta perpendicular con el segmento. Oculte la perpendicular y utilice la herramienta animación (□ 3) para animar el punto X (seleccione el punto X, presione la tecla mano, □, y utilice el Mouse ≅ para agregar un resorte al punto X. Suelte la tecla mano y el punto X empezará a moverse sobre el segmento horizontal. Lo mismo sucederá con el punto P sobre la circunferencia. Para detener la animación presione N.



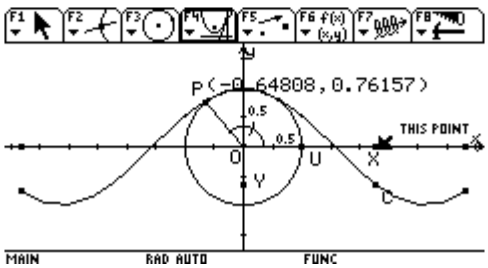
¿Cuál será el lugar geométrico del punto S cuando el punto X se mueve? ¿Qué significa esto algebraicamente?

6. Borre el punto S. Exhiba las coordenadas del punto P y transfiera la abscisa de P al eje y. Etiquete el punto obtenido con la letra Y. Construya la perpendicular al segmento sobre el eje x pasando por el punto X y la perpendicular al eje y por el punto Y. Sea C el punto de intersección de estas dos perpendiculares.

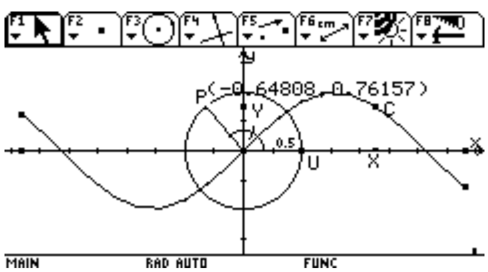




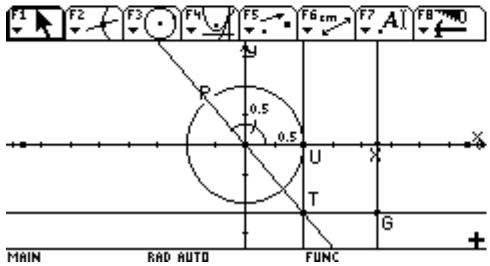
7. Oculte las dos rectas construidas anteriormente y anime el punto X. ¿Cuál será el lugar geométrico del punto C cuando el punto X se mueve? Utilice la herramienta lugar geométrico (A, señale el punto C y después el punto X) para obtener el lugar geométrico mencionado. Explique lo encontrado algebraicamente.

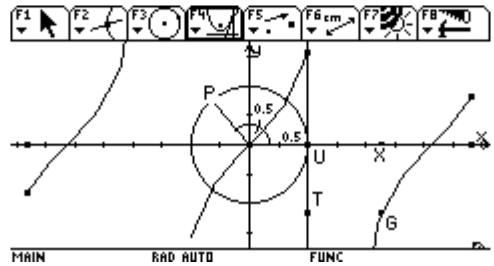


8. Repita el procedimiento de los pasos 6 y 7 pero utilizando la ordenada de P en lugar de la abscisa.



9. Borre los puntos C, Y en la construcción anterior y oculte las coordenadas de P. Construya una recta perpendicular al segmento sobre el eje x pasando por el punto U y la recta que pasa por el origen y por P. Sea T el punto de intersección de estas dos rectas. Construya una recta perpendicular al eje y pasando por T y otra perpendicular al segmento sobre el eje x pasando por X. Sea G el punto de intersección de estas dos rectas. Oculte las dos últimas perpendiculares y la recta que pasa por O y P. Construya el lugar geométrico del punto G cuando el punto X se mueve. Explique lo encontrado algebraicamente.

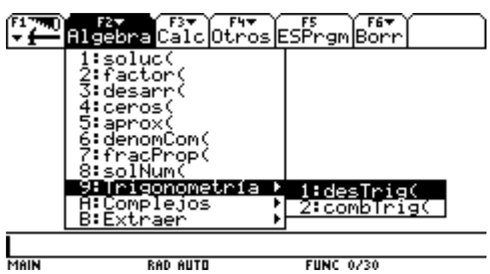




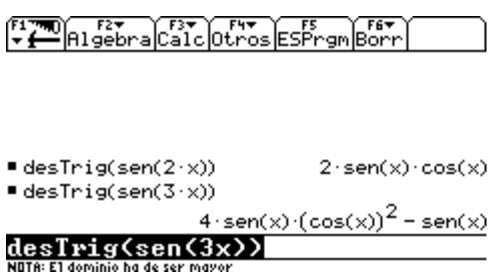
10. Resuma las observaciones y descubrimientos de los pasos 7 al 9. Explique la conexión entre el círculo unitario y las gráficas de las funciones trigonométricas.
11. **Reto:** Utilice un razonamiento parecido al utilizado en los pasos anteriores para construir las gráficas de las funciones $y = \cot x,\ y = \sec x,\ y = \csc x$.

Actividad 3: Identidades trigonométricas
Objetivo: Utilizar el CAS de la calculadora para verificar posibles identidades trigonométricas y resolver ecuaciones trigonométricas.

Mediante el uso de la capacidad de realizar cálculos simbólicos, particularmente con los comandos desTrig (9:1 desde la pantalla principal) y combTrig (9:2 desde la pantalla principal), podemos desarrollar ciertas expresiones trigonométricas o bien simplificarlas para obtener identidades.



1. Desarrollar $\mathrm{sen}(2x), \mathrm{sen}(3x), \mathrm{sen}(4x), \mathrm{sen}(5x)$. ¿Existe algún patrón en la expansión de las expresiones?

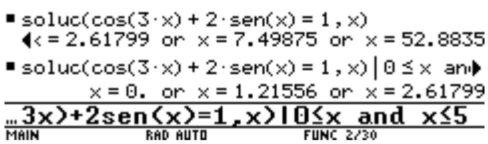


2. Dé una expresión equivalente a $5\cos x - 4\cos^3 x - 16\left(\mathrm{sen}^2 x\right)\left(\cos^3 x\right)$ y que sea lo más simplificada posible. Utilice el comando *combTrig* en la expresión dada.

3. ¿Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.1$? Escriba la expresión dada en la pantalla principal y presione ÷.
4. Utilice el comando soluc(□ 1 desde la pantalla principal) para resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas en $\mathbb{R}$. Utilice el modo RAD para ángulo.

$$\cos(3x) + 2\text{sen}(x) = 1, \ \cos(3x) + 2\text{sen}(x) = 1 \text{ para } 0 \le x \le 5\,rd$$

$$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1, \ \cos^2 x + \text{sen}^2 x = \frac{1}{2}.$$



Referencias

Maor E. (1998). Trigonometric Delights. New Jersey: Princeton University Press.

O´Connor J. & Robertson E. *The trigonometric functions*. Disponible en http://www-history.mcs.st andrews.ac.uk/HistTopics/Trigonometric_functions.html