

Atendiendo habilidades de visualización en la enseñanza de la geometría

Teresa Fernández Blanco
Universidad de Santiago de Compostela. España
teref.blanco@usc.es

Resumen: Partiendo de que muchas actividades de geometría requieren de ciertas habilidades de visualización para poder llegar a la solución con éxito, se realizó una evaluación diagnóstica sobre la formación de los futuros maestros en visualización y razonamiento espacial. En este trabajo se mostrarán los resultados globales obtenidos, poniendo de manifiesto la necesidad de complementar el conocimiento común y didáctico de estos estudiantes en ese tema.

Palabras claves: Geometría, visualización, formación de maestros.

Introducción

A partir de los años cuarenta y cincuenta crece el interés de los educadores matemáticos comenzaron acerca de las relaciones entre el espacio y las habilidades matemáticas. Como describe Bishop (1983, p. 181), algunos investigadores observaron que los test de habilidades espaciales tenían una correlación más alta con las habilidades en geometría que en álgebra y que el desarrollo de las habilidades espaciales era esencial para desarrollar las habilidades matemáticas.

Lean y Clements (1981) ofrecen una definición bastante general de “habilidad espacial” como la habilidad para formular imágenes mentales y manipularlas en la mente. Desde el punto de vista psicológico, la lista de destrezas necesarias para procesar imágenes mentales puede ser muy larga. Del Grande (1987, p. 127) y Gutiérrez (1991) identifican varias capacidades físico-psicológicas de las cuales algunas son habilidades específicas para su utilización en contextos matemáticos, en particular para el campo de la geometría:

- *Identificación visual.* Es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto. Se utiliza cuando la figura está formada por varias partes o cuando hay varias figuras superpuestas.
- *Constancia perceptual.* Es la habilidad para reconocer que algunas propiedades de un objeto (real o una imagen mental) son independientes del tamaño, color, textura o posición y a reconocer que un objeto o imagen mantiene su forma aunque deje de verse total o parcialmente, por ejemplo porque se haya girado u ocultado.
- *Percepción de posiciones espaciales o reconocimiento de las posiciones en el espacio.* Es la capacidad para relacionar la posición de un objeto o imagen mental con uno mismo o con otro objeto, que actúa de punto de referencia.
- *Percepción de relaciones espaciales.* Es la destreza que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos, dibujos, imágenes mentales entre ellos o

dentro de uno mismo. Por ejemplo, identificar que están girados, son perpendiculares, simétricos. Está estrechamente relacionada con la percepción anterior en muchas tareas.

- *Discriminación visual.* Es la habilidad para comparar varios objetos, dibujos, imágenes e identificar similitudes o diferencia entre ellos.
- *Memoria visual.* Es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.
- *Rotación mental.* Es la habilidad para producir imágenes mentales dinámicas y visualizar una configuración en movimiento.

Una revisión del contenido de diferentes libros de texto de primaria muestra que muchas actividades del bloque de geometría propuestas al alumnado de este nivel educativo requieren de ciertas habilidades de visualización para alcanzar la solución con éxito. Esto nos llevó a preguntarnos si los futuros maestros reconocían esas habilidades y, como consecuencia, a realizar una evaluación diagnóstica sobre su formación en ese tema.

Para ello se elaboró un cuestionario con siete ítems que abarcaran diferentes aspectos relacionados con habilidades de visualización y razonamiento espacial (realizar cortes de figuras, rotar figuras tri y bidimensionales, completar figuras bidimensionales para formar una figura simétrica, desarrollar y transformar cuerpos tridimensionales, analizar diferentes puntos de vista de una misma composición, conteo de estructuras ortoédricas con agujeros, componer y recomponer formas). Por otra parte, estas tareas seleccionadas formaban parte de los objetivos curriculares, al estar contemplados los contenidos matemáticos que intervienen, explícita o implícitamente, en el currículo de la formación de maestros.

El cuestionario se ha aplicado a 400 estudiantes de tercer curso de la Diplomatura de Maestro de la Universidad de Santiago de Compostela (España) en sus distintas especialidades (Primaria, Infantil, Lengua extranjera y Musical) a lo largo de tres cursos académicos (2005-2006; 2006-2007 y 2008-2009).

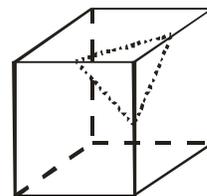
DESCRIPCIÓN DE CADA ÍTEM. HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN PUESTAS EN JUEGO

En las siguientes subsecciones se describen, para cada uno de los ítems, las habilidades de visualización implicadas con referencias a investigaciones relacionadas y ejemplos de actividades de libros de texto de primaria similares.

Ítem 1: cubo truncado

Se cortan todas las esquinas de un cubo de 2 cm. de lado como se indica en la figura, a distancia de 1cm. sobre cada arista. ¿Cuántos vértices tiene el sólido así obtenido?

- a) 6 b) 8 c) 12 d) 18 e) 24



Se combinan aquí dos tareas, la principal, que es la de conteo, y la de cortar un sólido (cubo en nuestro caso) por planos a una distancia determinada del vértice. Aunque no es preciso identificar específicamente la sección que produce el corte pues ya viene dada por la imagen ostensiva que aparece en el enunciado.

Atendiendo al tipo de respuesta solicitada, se trata de una tarea de identificación, mientras que si atendemos a la acción requerida, es de conteo de partes, en concreto de vértices. No hay necesidad de crear una imagen mental para su resolución ni tampoco se exige la identificación sobre el papel de ninguna imagen mental. Sin embargo, es bastante habitual que se movilice una imagen mental del cuerpo resultante durante el proceso de resolución.

En cuanto a la imagen presentada en el enunciado, es una representación en perspectiva paralela de un cubo con un vértice cortado.

La habilidad de relaciones espaciales se pone en juego al establecer la relación entre el plano que realiza el corte a una determinada distancia del vértice y las aristas del cubo a las que corta. Es la relación entre la inclinación del plano y el cubo la que establece el número de vértices de la figura resultante.

Se aplica la habilidad de identificación visual para poder reconocer la figura o los elementos del cubo que permanecen una vez que se han efectuado (mentalmente) los ocho cortes al cubo inicial. No se pide como respuesta una representación ostensiva de la figura resultante, sin embargo aquellos estudiantes que marcan todos los cortes sobre el cubo, como una ayuda para la resolución de la tarea, han de identificar los vértices de la nueva figura aislándolos de la estructura que corresponde al cubo.

En la Figura 1 se muestra una actividad de 6° de primaria en la que se solicita al alumno que cuente las caras, vértices y aristas de cada poliedro. Es una versión simplificada del ítem 1, en donde la habilidad de identificación visual se pone en juego para contar cada elemento pedido (aislándolo de los demás).

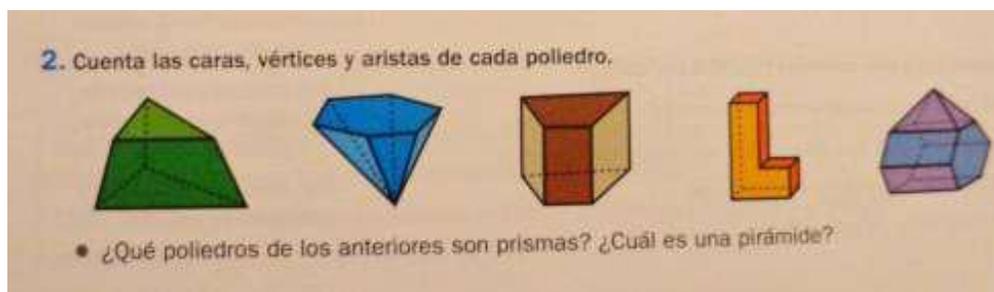
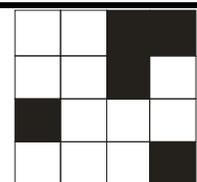


Figura 1. Matemáticas, 6° de Primaria. Santillana, 2009

Ítem 2: simetrías en el plano

¿Cuál es el menor número de cuadraditos que es necesario sombrear para que la figura resultante tenga por lo menos un eje de simetría? Indica en el dibujo cuáles serían esos cuadraditos.

- a) 3 b) 5 c) 1 d) 4 e) 2



El objetivo de la tarea consiste en crear una figura simétrica, para ello nos dan parte de la figura y es preciso sombrear el número mínimo de cuadraditos para que la figura resultante tenga al menos un eje de simetría. Además se debe indicar cuál es el eje de simetría de la figura creada.

El ítem exige pensar en dos dimensiones y, aunque se construya una imagen mental para resolverlo, no es necesario transformarla en el pensamiento. A pesar de que la respuesta solicitada aparezca en términos de identificación de una de las opciones, se pidió explícitamente en la prueba que se sombrearan los cuadraditos, por lo que la imagen mental ha de ser representada sobre el papel y la respuesta se interpreta de dibujo.

En este ítem se ponen en juego habilidades de identificación visual y de reconocimiento de las relaciones espaciales. Una vez formada, la figura se debe aislar del contexto, en este caso de la cuadrícula, para obtener una imagen completa de la misma. La habilidad de reconocimiento de las relaciones espaciales es necesaria para construir partes simétricas a las dadas y en conjunto obtener una figura con, al menos, un eje de simetría. La habilidad de memoria visual, siempre y cuando no se utilice la estrategia de aplicación de las propiedades de la simetría axial, permite recordar las características, en este caso de posición, que tendrían las cuadrículas dependiendo del eje de simetría utilizado.

La habilidad de rotación mental se pone en movimiento cuando se contempla la simetría como el efecto de doblar por el eje y hacer coincidir las dos partes simétricas. En ese caso, al ser una actividad sin la presencia de objeto físico, la acción a realizar es mental y se produce un movimiento de los cuadraditos negros saliendo del plano para coincidir con los nuevos sombreados (o viceversa).

Ya en los primeros cursos de primaria se pueden ver actividades de este tipo (Figura 2) en dónde, sobre todo, las habilidades de identificación visual y percepción de las relaciones espaciales son fundamentales para poder resolverla.

● Completa el dibujo para que sea simétrico.

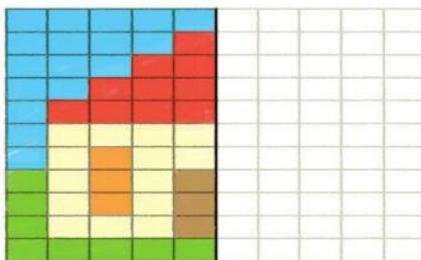
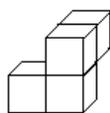
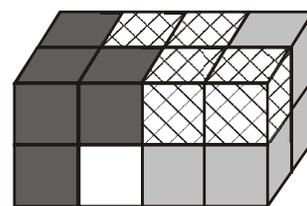


Figura 2. Matemáticas 2º primaria, Conecta con Pupi, Ed. SM, 2011

Ítem 3: ortoedro encajable

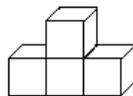
Se forma un paralelepípedo rectángulo usando 4 piezas, cada una de ellas formada por 4 cubos (ver la figura de la derecha). Tres de las piezas se ven por completo; la blanca sólo parcialmente. ¿Cuál de las 5 piezas siguientes es la blanca?



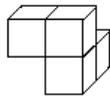
(A)



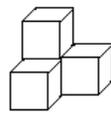
(B)



(C)



(D)



(E)

Es una actividad que se encuadra en el grupo de tareas en las que se compone un sólido a partir de varias piezas, en este caso diferentes. Llegar a la solución requiere otra acción, la de rotar, pues la pieza correcta no se encuentra en la posición adecuada para formar el ortoedro. El ítem requiere movimiento y construcción de imágenes mentales en un espacio tridimensional. La acción requerida no está explícita en el enunciado y para la resolución de la tarea es preciso construir una imagen mental y transformarla en el pensamiento.

Este ítem es muy rico en cuanto a las habilidades espaciales que se ponen en juego al resolverlo. La habilidad del reconocimiento de las relaciones espaciales permite establecer las relaciones entre el propio ortoedro y las diferentes piezas que lo forman. Así, la habilidad de reconocimiento de las posiciones espaciales establecerá la posición concreta dentro del ortoedro de cada una de las piezas. La constancia perceptual permite reconocer que las piezas mantienen su forma aunque dejen de verse total o parcialmente y que sus propiedades no varían al cambiarlas de posición y girarlas.

Cuando los alumnos tienen que enumerar una disposición 3D de cubos de un prisma rectangular, deben estructurar la disposición de forma que coordinen la información que ellos han construido desde las vistas ortogonales de las caras del prisma.

El tipo de representación plana utilizado en este ítem es la perspectiva paralela, tanto para la construcción completa (ortoedro) como para las diferentes opciones de respuesta que se dan. Al utilizar esta perspectiva, las relaciones entre los cubos que integran el módulo son de posición (delante, detrás, encima, debajo) y de orientación (están en líneas perpendiculares o paralelas).

Hemos constatado que existe un porcentaje muy bajo de actividades de este tipo (puzle tridimensional) en los libros de texto de primaria. Como ejemplo, adjuntamos la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** en la que las habilidades de identificación visual (para buscar cada una de las partes y aislarla del resto) y la de la percepción de las relaciones espaciales (para establecer la relación de cada parte dentro del todo) se ponen de manifiesto.

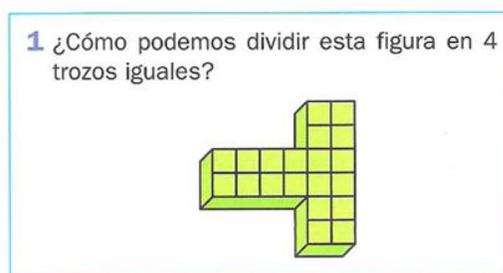
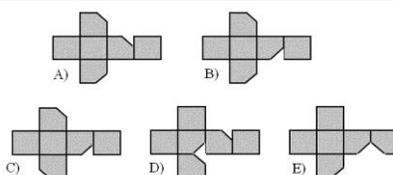


Figura 3. Matemáticas 4º de Primaria, Ed. Anaya, 2011

Ítem 4: desarrollo del cubo sin vértice

Cortamos el vértice de un cubo. ¿Cuál de los desarrollos planos que se muestran corresponde al cuerpo resultante?



Este ítem pertenece al grupo de tareas en las que el objetivo consiste en identificar el desarrollo plano de un cubo al que se ha cortado previamente uno de sus vértices. Esta tarea se combina con tareas de identificar cortes de sólidos por diferentes planos.

Se potencia en este ítem la habilidad de discriminación visual. Al montar mentalmente los diferentes desarrollos se comparan con la imagen que se tiene de un cubo con un vértice cortado, o bien se realiza el desarrollo de un cubo con un vértice cortado y se compara dicho desarrollo con las diversas opciones que se dan.

El proceso de desarrollar y plegar sólidos involucra la manipulación y extrapolación de imaginación visual. Diezmann y Lowrie (2009, p. 422) hablan de un error en particular que se produce al hacer una asociación incorrecta entre dos partes de una misma forma o entre una parte de la forma y la correspondiente parte de su desarrollo plano. Además, consideran que una dificultad presente en este tipo de situaciones, y en particular para este ítem 4, es la memoria visual limitada.

Siguiendo a Mesquita (1992), el doble estatus de los objetos geométricos también está presente en el espacio de tres dimensiones, que además se incorpora a las dificultades propias de conversión de representaciones. El desarrollo de un sólido tiene características particulares que lo diferencian de otro tipo de representaciones externas. Por un lado, conserva la forma y la magnitud de las caras, los lados y las relaciones métricas en dos dimensiones del cuerpo tridimensional. Pero por otro lado, existen puntos del espacio que tienen dos imágenes en el plano (fenómeno de *splitting*) lo que se convierte en uno de los obstáculos asociados a este tipo de representación.

El desarrollo plano que se presenta en el ítem, en todas las opciones de respuesta, corresponde a la representación estereotipada de desarrollo de un cubo (prototipo), es el tipo 1-4-1 (en forma de T o de cruz). Debido a su regularidad y simetría parece ser el desarrollo más fácil de asociar con un cubo: la disposición de las caras conduce hacia la imagen estereotipada de cubo como cuatro caras laterales y dos bases, además, da una visión anisótropa en la que la dirección horizontal es preferente (propio de culturas occidentales). En la siguiente figura (Figura 4) podemos ver un ejemplo de este tipo de actividades para educación primaria. Aunque los desarrollos presentados, en cada apartado, son desarrollos de ortoedros, sólo uno de ellos corresponde al caso particular presentado.

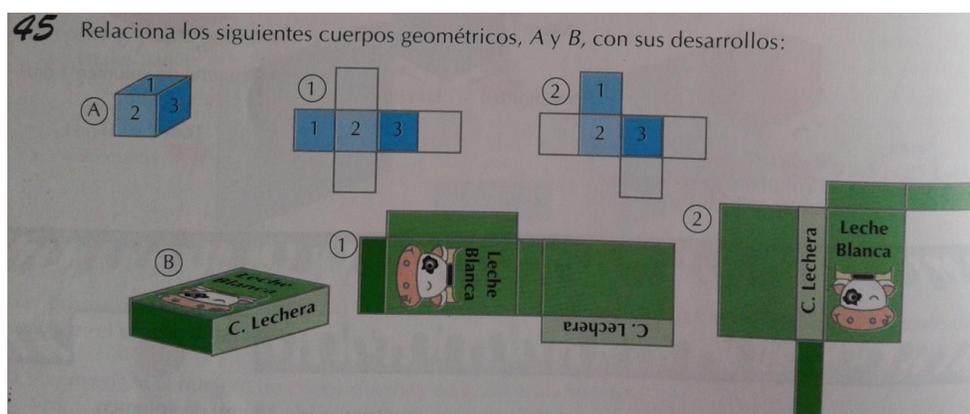
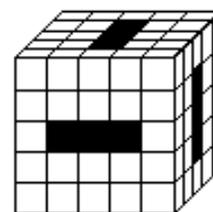


Figura 4. Matemáticas 6° primaria, Ed. Vértice, Bruño, 1997.

Ítem5: cubo perforado

Se hacen túneles que atraviesan un cubo grande como se indica en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños quedan?

- a) 88 b) 80 c) 70 d) 96 e) 85



La tarea pertenece al grupo de aquellas que solicitan contar el número de cubos que forman una estructura. La única variante con respecto al resto de tareas de ese grupo es que en este caso el sólido no es compacto, sino que está atravesado por tres túneles.

Se presenta como una tarea dónde la acción principal requerida es de conteo. Para realizar dicha acción se ponen en funcionamiento las habilidades de reconocimiento de relaciones y posiciones espaciales. Estas destrezas son imprescindibles para poder dibujar representaciones planas de módulos de cubos, sobre todo en aquellos casos que utilizan la estrategia "por capas" para resolver esta tarea. Al utilizar la representación en perspectiva paralela, las relaciones entre los cubos que integran el módulo son de posición (delante, detrás, encima, debajo) y de orientación (están en líneas perpendiculares o paralelas), al igual que ocurría en el ítem 3.

La investigación llevada a cabo por Battista y Clements (1996, p. 290) sugiere que las nociones de estructura espacial, formación de composiciones (unidades) y la coordinación e integración de las operaciones son componentes esenciales para el desarrollo de la comprensión de estas disposiciones por parte de los estudiantes. Para realizar la enumeración de una disposición 3D, los estudiantes se centran en las disposiciones de cuadrados que aparecen en las caras exteriores de la disposición 3D. Estos deben considerar tales disposiciones 2D como representaciones de unidades compuestas de cubos, no de caras de cubos o cuadrados. Para crear esta representación y mantenerla mientras se cambia de una vista de la disposición a otra, los estudiantes deben construir y coordinar perspectivas. Así, no sólo deben verse cuadrados que representan caras de cubos sino también conjuntos de caras (como las de los lados) que deben ser coordinadas con otros conjuntos debido a que ellas representan a los mismos cubos.

La medición es fundamental para entender la estructura de las formas, usar sistemas de coordenadas para determinar localizaciones en el espacio, especificar transformaciones, y establecer el tamaño de los objetos. En la línea de Battista (2007, p. 891), se utiliza aquí el término medición geométrica en su sentido matemático amplio y abstracto, como el concepto de asignar números a entidades geométricas de acuerdo a un conjunto de axiomas. En este caso, la medición geométrica incluye el significado de que los números pueden usarse para cuantificar la cantidad del atributo volumen de un objeto geométrico, determinando el número de unidades atributos contenidos en el objeto. Este proceso requiere de una integración de conocimiento conceptual y procedimental.

La siguiente actividad (Figura 5) es muy similar al ítem 5, en la que están implicadas exactamente las mismas habilidades de visualización.

Enunciado

Alberto ha construido un cubo, de dimensiones $4 \times 4 \times 4$, con cubitos pequeños, rojos y azules, de dimensiones $1 \times 1 \times 1$.

Y ahora nos plantea un problema:

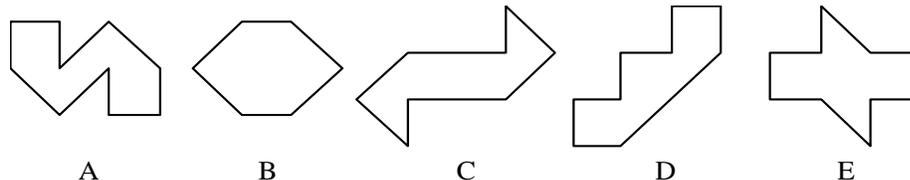
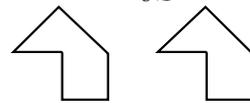
¿Cuántos cubitos rojos y cuántos azules ha necesitado?



Figura 5. Matemáticas 5º de Primaria, Ed. Vicens Vives, 2009.

Ítem 6: componer formas con dos piezas iguales

Tenemos dos piezas idénticas que podemos mover, sin levantar de la mesa. ¿Qué figura NO podremos formar con estas dos piezas?



Este ítem se encuadra dentro de grupo de tareas cuyo objetivo es formar una figura con varias piezas dadas, bajo la condición de que dichas piezas sólo se pueden trasladar y girar en el plano, por lo tanto también se combina con la acción de identificar una figura en diferentes posiciones. La tarea requiere también la acción de identificar las dos piezas en las opciones que se ofrecen en el enunciado.

Esta tarea se presenta para ser resuelta en el plano y exige la construcción y la transformación de imágenes mentales. Siguiendo a Owens (1992, p. 202), aquellas operaciones que encarnan acciones de juntar dos figuras para formar otra, se contemplan como procesos de pensamiento espacial, así como la imaginación visual usada para representar, reconocer y/o reproducir una forma o posición.

Una de las habilidades puestas en juego es el reconocimiento de las relaciones espaciales que lleva a identificar correctamente las relaciones entre las dos piezas, en cada una de las figuras (si están giradas, si son simétricas, etc.). Otra es la habilidad de conservación de la percepción para reconocer que las piezas mantienen su forma independientemente de haberlas girado. La combinación de ambas es la habilidad de conservación de las relaciones espaciales, presente en la resolución del ítem. También es necesaria la habilidad de identificación visual para reconocer las dos piezas en cada una de las figuras. Se producen imágenes mentales dinámicas al aplicar diferentes movimientos a las dos piezas para situarlas en las posiciones que dan lugar a las opciones del enunciado de la tarea. En este caso estaríamos considerando la habilidad de rotación mental.

En la revisión de los libros de texto no hemos encontrado una actividad que se ajustara a este ítem; sin embargo, sí hay tareas en las que la base del ítem está presente (formar polígonos aplicando movimientos en el plano a dos o tres piezas dadas). Las habilidades presentes en la resolución de la tarea de la Figura 6 son las mismas que las del ítem 6.

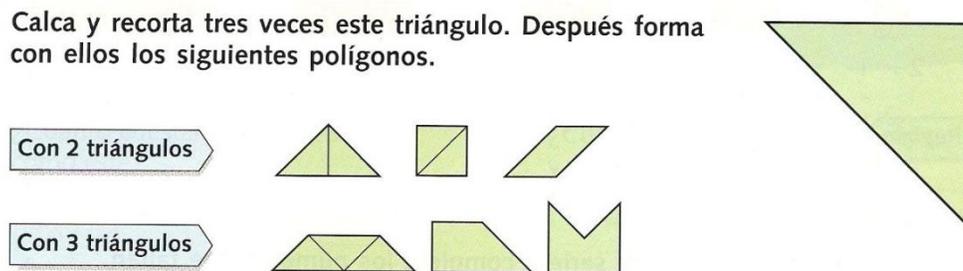


Figura 6. Matemáticas 3° de Primaria, Ed. Anaya, 2010.

Ítem 7: generación de cuerpos mediante rotaciones en el espacio

Dibuja, de forma aproximada, qué cuerpos obtendremos al hacer girar las siguientes figuras respecto de los ejes que se indican.



La tarea tiene dos objetivos claros: crear una imagen mental de un objeto tridimensional y dibujar una representación plana de tal objeto. En cuanto al tipo de tareas en las que se enmarca, esta pertenece al grupo de aquellas en las que se pide dibujar el cuerpo de revolución que genera una figura al girar

alrededor de un eje dado. Esta tarea conlleva la acción de realizar una representación plana: perspectiva, por niveles, ortogonal, etc.

Para responder correctamente a este ítem hay que integrar, al menos, a) la habilidad de rotación mental, ya que hay que producir imágenes mentales dinámicas y visualizar una configuración en movimiento; b) habilidad de reconocimiento de posiciones en el espacio, para mantener la distancia o no a los ejes, fundamental para tener una imagen conceptual correcta, c) habilidad de reconocimiento de las relaciones espaciales y d) constancia perceptual para reconocer que las propiedades de las figuras A y B no varían al girarlas.

En cuanto al tipo de respuesta que se pide, esta es de dibujo. Ello supone que los estudiantes han de realizar una representación ostensiva de la solución. Aunque, de entre las diferentes formas de dibujo de sólidos, la perspectiva aun siendo la más natural y frecuente, es la más difícil de realizar con corrección.

En la actividad que presentamos a continuación (Figura 7) no se les exige a los alumnos de primaria que dibujen el cuerpo resultante sino simplemente que asocien el cuerpo generado con las imágenes que ahí aparecen. Ello supone una simplificación importante de la tarea, siendo la respuesta, en este caso, de identificación. Tampoco aparecen figuras separadas del eje lo cual reduce la dificultad de la misma al no generarse cuerpos con “agujeros”.

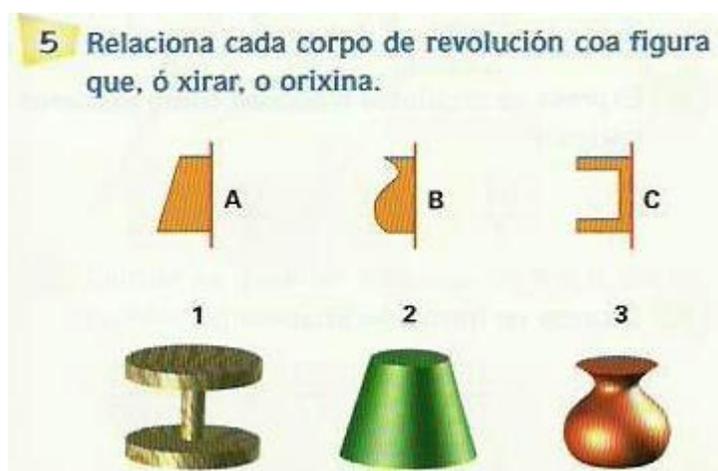
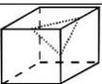


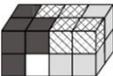
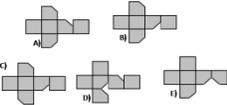
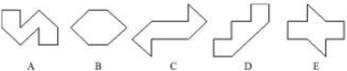
Figura 7. Matemáticas 5º de Primaria, Ed. Vicens Vives, 2001.

Resultados globales y principales conflictos

La Tabla 1 muestra el número de respuestas correctas a cada ítem, lo que nos proporciona una idea del nivel de dificultad de cada uno de ellos. El ítem 2 y el ítem 7 han resultado especialmente complicados como se puede deducir del porcentaje de respuestas correctas.

Tabla 1. Distribución del número de respuestas correctas por ítem

Ítem	Distintivo gráfico	Frecuencia	Porcentaje
1		73	18,25

2		34	8,50
3		154	38,50
4		304	76,00
5		85	21,25
6		151	37,75
7		16	4,00

Globalmente podemos señalar que el cuestionario ha resultado bastante difícil para los estudiantes, teniendo en cuenta el bajo porcentaje de respuestas correctas asociadas a cada uno de los ítems. Los principales conflictos detectados están directamente asociados con la interpretación de la representación plana de los objetos tridimensionales y la de los diagramas presentados (habilidades de identificación visual, constancia perceptual y reconocimiento de las posiciones y relaciones espaciales). Los conflictos relacionados con la representación plana se pueden observar, principalmente, en el ítem 3 e ítem 5. Los relacionados con la segunda cuestión se presentan principalmente en los ítems 2 y 7.

Existe un porcentaje alto de estudiantes que tienen una estructura espacial de las figuras basada en un conjunto de caras no coordinadas, como se recoge en el análisis de los errores 3C del ítem 1 y 2C y 3C del ítem 5. En ese caso, realizan doble conteo sobre determinados elementos de las figuras (vértices, aristas, unidades). Esta visión también aparece como error 3C en el ítem 6, al no considerar una posible pérdida de lados o vértices totales al unir dos figuras de la forma que se pide en la tarea. Se pone de manifiesto otra vez que las habilidades percepción y relación de las posiciones espaciales están poco desarrolladas.

Conclusiones

Dada la distribución de respuestas correctas por ítem (Tabla 1), con porcentajes por debajo del 40% salvo en el ítem 4, resulta evidente que, a excepción de este ítem, las tareas presentadas no forman parte de la práctica habitual de estos estudiantes. Se ha observado que dichos estudiantes tienen ideas muy vagas y limitadas sobre conceptos básicos como simetría, giro, cubo, ortoedro, paralelepípedo, etc. y frecuentemente el significado que atribuyen a los mismos está basado en ejemplos prototípicos. No están acostumbrados a realizar cortes de sólidos, a desarrollar cuerpos truncados y a generar sólidos de revolución. Así mismo, la representación plana de objetos tridimensionales no forma parte de su formación y se producen numerosos conflictos a la hora de realizarla o bien de interpretarla.

Los resultados muestran, al igual que en el estudio de Malara (1998), que los futuros profesores se encontraron con dificultades para coordinar las visiones parciales de un objeto, para visualizar los objetos globalmente, para evocar la visión desde uno de sus cuatro puntos de vista fundamentales y para verificar la corrección de sus producciones y conceptualizar los principios de representación.

Se ha detectado que, en la resolución de la mayoría de las tareas, las referencias o restricciones visuales son más fuertes para los alumnos que las que vienen dadas a partir de una sentencia verbal. Por ejemplo, en el caso del ítem 1 el 33,75% no atiende a que el corte se haga a 1 cm., en el ítem 5 el 24,50% no contemplan que los túneles atraviesan el cubo, en el ítem 6 el 33% de los estudiantes no consideran que las piezas no se puedan levantar de la mesa y, en el ítem 7, un 49,50% de los sujetos no reparan en la palabra girar. Este poder de lo visual sobre lo verbal ha de ser canalizado, es decir, es necesario aprender a manipularlo para trabajar y razonar sobre esas imágenes.

Uno de los elementos que más afectó a la resolución de las tareas fue la acción requerida (Gorgorió, 1998). Aquellas que requieren la acción de dibujar, que se corresponden con el ítem 2 y el ítem 7, fueron las que menor porcentaje de aciertos tuvieron, el 8,5% y el 4%, respectivamente.

Desde una perspectiva formativa nuestra investigación nos ha llevado hacia dos aspectos a tener en cuenta. El primero pone de manifiesto la poca variedad existente en el tipo de tareas que presentan los libros de texto, sobre todo en cuanto a la acción a realizar y también al tipo de respuesta exigida. La clasificación de tareas de visualización propuesta por Gonzato, Fernández y Godino (2011) ofrece una oportunidad a los futuros maestros para hacer más ricas y variadas las actividades relacionadas con la visualización y la geometría espacial y plana. El segundo aspecto ha revelado importantes carencias de los futuros maestros en cuanto a conocimiento común del contenido de visualización y razonamiento espacial. Se deriva, por tanto, la necesidad de diseñar e implementar acciones formativas específicas para promover la mejora de este tipo de conocimiento y del conocimiento ampliado del contenido para favorecer la autonomía de estos estudiantes a la hora de proponer nuevas tareas.

Bibliografía

- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Battista, M. T. & Clements, D. H. (1996). Student's understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 258-292.
- Bishop, A. J. (1983). Space and Geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds), *Acquisition of Mathematics Concepts and Process* (pp. 175-203). New York: Academic.
- Del Grande, J. J. (1987). Spatial perception and primary geometry. In Montgomery, M. Shulte, A. (Eds.), *Learning and Teaching geometry, K-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Diezmann, C. & Lowrie, T. (2009). Primary students' spatial visualization and spatial orientation; an evidence base for instruction. En Tzekaki, M.; Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), *Proceeding of the 33rd PME International Conference*, 2, 417-424.

- Fernández Blanco, T. (2012). Resultados de una evaluación sobre habilidades de visualización y razonamiento espacial en futuros profesores de primaria. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.
- C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI. Comunicaciones de los grupos de investigación* (pp. 285 - 294). Jaén: SEIEM.
- Gonzato, M.; Fernández, T. y Godino, J.D. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial: un estudio sistemático basado en la investigación didáctica. (77), 99-117.
- Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics* 35, 207-231.
- Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. En A. Gutiérrez (Ed.), *Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación Matemática: Geometría*, 44-59. México D.F.: CINVESTAV.
- Lean, G. A. & Clements, K. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (3), 267-299.
- Malara, N. (1998). On the difficulties of visualization and representation of 3D objects in middle school teachers. En Olivier, A y Newstead, K. (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 3, 239-246.
- Mesquita, A.L. (1992). The types of apprehension in spatial geometry: sketch of a research. *Structural topology*, 18, 19-30.
- Owens, K. (1992). Spatial thinking takes shape through primary school experiences. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th PME International Conference*, 2, 202-209.
- Parzysch, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". Problem of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.